

## 1. РЕАЛИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Корректно поставленные задачи и полное обеспечение исследований позволяют, реализовав эксперимент, получить в той или иной форме ответы на поставленные исследователем вопросы. Причем стратегия и тактика исследований определяются общей методологией и частными методиками исследований.

### 1.1 Методология и методика

Методология научного познания, в общем широком смысле, базируется на диалектике – науке о наиболее общих свойствах, связях и законах бытия. Из общего диалектического подхода вытекает метод – правила познавательной деятельности или способ осуществления этой деятельности, определяющий ее структуру, т.е. некоторую совокупность операций, применяемых для решения задач определенного класса.

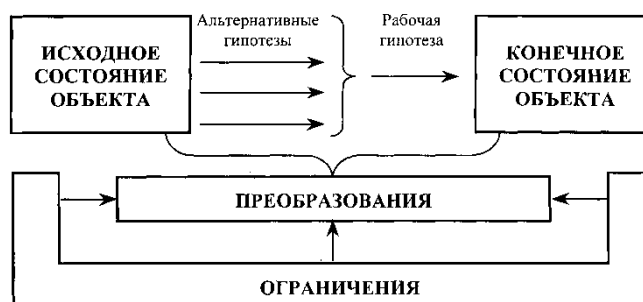
В качестве примера может быть приведен исторический метод – способ решения задач познания путем воспроизведения их истории (генезиса проблемы) или логический метод-способ решения задач познания путем воспроизведения таких сторон объекта, которые характеризуют его относительную стабильность, инвариантность (например, тип кристаллической решетки).

Примерами общенаучного методологического подхода являются также системно-структурные и статистические методы. О методологии современного инженерного эксперимента можно говорить, если имеется общая методика для исследования объектов или процессов разной физической природы.

Следующий этап реализации эксперимента – это методика исследований, т.е. совокупность способов и приемов проведения экспериментальных исследований, обеспечивающих получение единообразного (статистически однородного) и достоверного (воспроизводимого) эмпирического материала.

Поскольку методология современного инженерного эксперимента как обязательный этап включает формализацию объекта и моделирование, остановимся на последнем. Модель – это абстрактный или конкретный объект, отражающий структуру и поведение реального объекта или процесса. Например, простейшая модель решения инженерной задачи может быть представлена в виде блок-схемы (рис. 1).

В настоящее время моделирование приобретает роль общего метода научного исследования.



к 1 Блок-схема решения исследовательских задач

Понятие модели непрерывно развивается. До XIX века подобием оперировали только в механических представлениях. Сейчас в основе моделирования лежит теория подобия. Основной ее постулат: объекты подобны, если между ними наблюдается соответствие, определяемое критериями подобия – безразмерными комплексами параметров процесса и системы, в которой он протекает. Примерами подобных комплексов будет число Рейнольдса в гидравлике, Прандтля – в теплотехнике, Маха – в аэродинамике.

Модели могут быть материальными (вещественно-агрегатными), мысленными (программы ЭВМ) и знаковыми (химические символы элементов).

Следует иметь в виду, что модели, отвечающие физике параметров или процессов (физические законы), можно получить в технических экспериментах только на основе теоретических предпосылок, а не непосредственно из результатов экспериментов. Это объясняется тем, что любые экспериментальные результаты (обычно ряды чисел) можно аппроксимировать целым набором различных математических функций. Но из-за ограниченности интервалов варьирования факторов структура этих функций (моделей) может никак не соответствовать реальному физическому содержанию исследуемых процессов. Примером могут служить известные эмпирические формулы резания металлов.

Эти обстоятельства подтверждают существенность связи экспериментальных исследований с теоретическими. «Ни одно исследование не может назваться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства» (Леонардо-да-Винчи).

Переход от эмпирического к теоретическому уровню – это не просто перевод знаний с быденного языка на научный, а изменения в содержании и форме знаний. По П. Ланжевону: «Теория превращает новые факты в новые принципы».

Выдвигая новое теоретическое построение, мы опровергаем что-то старое и одновременно доказываем что-то новое. Теоретическое мышление отражает объект со стороны его внутренних связей и закономерностей, постигаемых путем рациональной обработки экспериментальных данных. Теоретические исследования общи, а экспериментальные – отражают лишь часть сущности.

Научная теория – это объединенная единым началом система суждений, включающая относительно законченные мысли, отражающие объекты, явления, их свойства, связи и отношения.

Однако утверждение, что эксперимент лишь доказательство истинности теории или орудие построения новых гипотез, неверно. Результаты всякого научного эксперимента не только отражают имеющиеся теоретические построения, но и являются самостоятельным носителем объективной информации.

## **1.2 Результаты исследований**

Характерной особенностью подавляющего числа инженерных исследовательских задач является сочетание подчеркнуто конкретного задания с неопределенностью в выборе решений, т.е. с большой творческой свободой.

Это связано с тем, что «ученый по Т. Кэрмену – изучает то, что существует, а инженер то, чего еще никогда не было».

Следовательно, инженер-исследователь вынужден определить возможность построения системы альтернатив при решении задачи, т.е. выдвинуть ряд гипотез.

Гипотезы – это не истинное познание природы, а догадки о нем.

Выдвижение и проверка гипотез базируется на двух методах. Алгоритмическом – строгой последовательности четких указаний и эвристическом – интуиции, ассоциациях.

Характерно, что гипотеза не может быть окончательно удостоверена при ее экспериментальной проверке. Гипотезы всегда открыты для дальнейшей проверки. Можно лишь сказать, что гипотеза не опровергается результатами наблюдений.

Выбор альтернативы решения поставленной задачи в зависимости от ее типа может быть выполнен при помощи анализа патентных, литературных и других источников, методами априорного ранжирования или случайного баланса, а также поисковыми или установочными экспериментами.

Поисковые экспериментальные исследования позволяют установить направление процесса (по одному опыту на  $\min$  и  $\max$  границах фактора), значимость факторов (по два опыта на фактор), вариант принятой гипотезы (три-пять опытов). В результате мы будем иметь рабочую гипотезу (см. рис. 1) – научное предположение о развитии исследуемых явлений и их объяснение. Предположения не доказанные, но вероятные.

Условия, искусственно созданные экспериментатором в лаборатории, неосуществимы на практике в реальных системах. Но даже в этих идеализированных условиях воспроизводимость результатов опытов не абсолютна. Поэтому говорят о степени воспроизводимости (приближении), т.е. не об одинаковых, а о параллельных опытах.

Даже самое простое устройство (машина, электротехнический аппарат, другой объект) органически соединяет в себе элементы, являющиеся достижениями самых разных дисциплин. Отсюда вытекает возможность реализации интегрального подхода к объекту (например, машине) как к единой физико-механической системе. Вместе с тем, несовершенство большинства экспериментальных методов позволяет исследовать объект лишь в расчлененном поэлементном виде. При реализации подобного дифференциального подхода следует различать исследования и испытания.

Исследование – это изучение закономерностей развития явлений и их объяснение, а испытания – это проверка, установленных заранее (например, ГОСТом) свойств или качеств объекта.

В прикладных дисциплинах испытания играют не менее важную роль, чем исследования.

Сопоставляя результаты экспериментальных исследований, можно раскрыть связи, взаимодействия, функциональные зависимости. После их установления выявляются главные связи и общие закономерности явлений. При

экспериментальных исследованиях используются в основном причинно-следственные связи для выявления и познания всех других связей в объекте.

Таким образом, экспериментальные исследования играют тройную роль:

- подтверждают или опровергают, установленные ранее теоретические положения;

- являются источником новых гипотез и теорий;

- служат накоплению объективной научной информации.

Результаты экспериментальных исследований могут быть представлены в виде таблиц, диаграмм, номограмм, гистограмм, графиков различного типа, математических моделей, блок-схем, структур и перечня связей объекта. Способ интерпретации результатов зависит от целей исследования. Для наглядного информирования – это графики и диаграммы; для интерполяционных расчетов – это таблицы, номограммы, математические модели; для раскрытия качественных характеристик объекта – это блок-схемы, связи и т.п.

В итоге общая схема основных этапов при реализации экспериментальных исследований обычно включает:

- 1) построение альтернативных гипотез (вариантов);

- 2) выбор рабочей гипотезы;

- 3) выявление связи с теорией;

- 4) выбор структуры моделей;

- 5) реализация опытов;

- 6) определение параметров модели;

- 7) анализ полученной информации;

- 8) интерпретацию экспериментальных результатов;

- 9) экстраполяцию выводов на более широкую, чем в эксперименте, область параметров объекта.

Последний этап неизбежно требует оценки точности экстраполяции, определяемой дисперсией предсказаний.

## **2.АПРИОРНАЯ ИНФОРМАЦИЯ И ЕЕ ОБРАБОТКА**

Априорной называется информация, которой располагает исследователь до того, как он приступит к экспериментам. В современных отраслях знаний объем этой информации, как правило, достаточно велик и определяется публикациями по теме. Подобная информация часто противоречива и имеет не всегда высокую достоверность (разные эксперименты в сходных условиях дали различные результаты), а границы ее размыты (не всегда известен диапазон варьирования параметров).

Таким образом, априорная информация может быть представлена в виде множества отдельных несистематизированных данных об объекте исследования (процессе, устройстве) и его параметрах. Следствием этого является задача об объективном ограничении номенклатуры переменных и о выделении главных факторов.

### **2.1 Системный подход**

В современной науке происходит быстрый рост интегральных задач синтеза, требующих междисциплинарных исследований. Разработка их привела к объединению научных методов и установлению общих закономерностей для различных объектов и традиционных научных дисциплин.

В результате русский врач, философ и общественный деятель А.А. Богданов разработал в начале XX века общую теорию систем, названную им тектологией.

Система – это ряд элементов, взаимосвязанных структурно и функционально. Понятие системы относительно: любая система включает подсистемы и сама является подсистемой более общей системы.

Теория систем – это формальная эмпирико-интуитивная дисциплина, применимая ко всем наукам, имеющим дело с системами.

Условия существования систем могут быть сформулированы следующим образом:

- есть набор объектов;
- есть набор признаков каждого объекта;
- есть набор признаков набора объектов;
- есть набор признаков набора признаков объектов.

Каждое из этих условий необходимо, но только их сумма позволяет выделить систему.

Первые два условия – это условия актуальности, т.е. наблюдаемые объекты становятся претендентами на включение их в систему. Третье - определяет связь между объектами, четвертое – связь между признаками объектов.

Каждая система может быть выделена гипотетической оболочкой (воображаемой контрольной поверхностью, логической границей) из ее окружения.

К внутренним связям системы можно отнести следующие:

- структурные (связи субординации);
- генетические (связи развития);
- координационные (связи взаимодействия);

- функциональные (связи назначения).

Связь системы с окружением определяется входом и выходом. Отсюда функция системы – это преобразование входов в выходы. Оно может моделироваться терминологически, математически, физическими аналогами, знаковыми системами и т.п.

Система разомкнутая (открытая), если существует обмен массой, энергией, информацией с окружающей средой. Система замкнута (закрыта), если этот объем пренебрежимо мал.

Структурное описание системы – это ее внутренние параметры, функциональное – внешние.

При существующем уровне знаний понимание сложных систем возможно только при выделении отдельных срезов системы – ее функциональных плоскостей с собственным специфическим входом-выходом.

Например, в измерительной системе можно выделить срезы преобразования, коммутации, фиксации и т.п.

Итак, общая схема системного подхода включает этапы, характеризующие структуру выделенной системы.

В существующем виде системный подход эффективно выполняет постановку проблемы, базируясь на дескриптивном (описательном) анализе и систематизации существующего знания, т.е. априорной информации. Накопление огромной ее массы не только не облегчает, но значительно усложняет представление об исследуемом объекте.

Любая общая картина сложного объекта всегда остается неполной и односторонней. Выступая с анализом, системный подход выделяет свойства, делающие объект частью целого, а – с синтезом – позволяет представить целое, состоящее из отдельных частей. Здесь большую роль играет принцип формализации – уточнения содержания посредством выявления его формы.

## **2.2 Классификация**

Классификация любых объектов неразрывно связана с системным подходом и является его логической конкретизацией и развитием. Первая операция, производимая исследователем над множеством данных априорной информации, включает изучение его организации, т.е. разнообразия входящих в него объектов и их связей.

Систематизация объектов информационного множества может быть выполнена путем разделения всего множества на группы в соответствии с обобщающими и дифференцирующими признаками. В качестве последних используют любой критерий, например, степень сложности объектов. Итогом систематизации должна быть классификация, которая не только делит все множество на отдельные группы и элементы, но и вскрывает связи между ними.

Следовательно, классификация требует знания соотношения целого и его элементов, а также структурных связей.

Основные типы связей включают следующее:

1. Относительные связи, когда самостоятельные объекты объединяются взаимодействием. Например: солнце и планеты.

2. Причинно-следственные связи. Например: отец и сын; нагрузка и напряжение.

3. Связь отношений двух и более сторон в едином целом. Например: полюса магнита.

4. Связь предшествующего состояния с последующим. Например: обкатка двигателя и его нормальная эксплуатация.

5. Сравнительная связь большого и малого. Например: толстолистовой и тонколистовой прокат.

В каждом явлении имеются внутренние элементы, его образующие, и соответствующая структура – способ их связи между собой. Каждый элемент, в свою очередь, обладает внутренней структурой.

При классификации особое внимание следует уделять единому обобщающему логическому признаку. Пренебрежение этим приводит к высказываниям типа: «Шел дождь и три студента. Один – в унынии, другой – в калошах, третий – в пивную».

Очень важным является требование выдерживать единый иерархический уровень признаков. Если в качестве такого признака выбрана степень важности элементов, то неверно утверждать, что человек состоит из головы, туловища, волос, ногтей и т.п.

Наконец, различительные признаки должны быть дискретными, т.е. позволять однозначно различать группы элементов классификации (кресло, стул, табурет), или, хотя бы, условно дискретными (прессы малого до 63 т., среднего до 100 т. и большого более 100 т. усилия)

К недостаткам различных классификационных подходов следует отнести следующее:

- значительный вклад субъективных качеств исследователя;
- неоднозначность, так как возможны различные варианты классификации;
- отсутствие возможности математизировать процесс и объективно оценить его качество.

Основой любой классификации являются признаки – характеристики, обобщаемые для всего множества объектов (например, измерительные инструменты). Признак  $n$  значим, если множество объектов разбито на  $n$  классов. Знать признак – это определить принадлежность к соответствующему классу, по крайней мере, одного объекта (например: микрометрические и штанген-инструменты).

Первоначальным этапом классификации является формализация описания множества объектов путем установления базисов – подмножеств фактически необходимых признаков. Базисная таблица идентификации включает столбцы – объекты и строки – необходимые и достаточные признаки для отделения каждого объекта от всех остальных.

Практически легче выделить признаки не путем их подробного описания, а путем сопоставления друг с другом.

Критерием разграничения различительных и избыточных признаков является их устранимость. Признак устраним, если объекты могут быть разли-

чимы без этого признака, т.е. эти признаки связывают систему с окружением – объектами в ней отсутствующими. При описании среды через систему они становятся наиболее существенными. Так, способность измерить размер является избыточным (не отличительным) признаком штанген и микрометрических инструментов, но этот признак позволяет объединить их и выделить из более общей группы инструментов, включающих еще калибры и эталоны.

### **2.3 Последовательный отсеивающий эксперимент**

Последовательный отсеивающий эксперимент – это чисто экспериментальная процедура, проводимая с целью выявления из априорного множества факторов тех, которые оказывают наибольшее влияние на выходной параметр объекта.

Использование этого метода наиболее эффективно, когда параметр выхода зависит от большого числа факторов и, в особенности, если последние носят дискретный качественный характер.

Суть метода заключается в последовательном экспериментальном переборе всех переменных факторов в одних и тех же условиях для выявления наиболее влияющих на результат. При этом применяются форсированные режимы (максимально сокращающие время эксперимента) при сохранении неизменности физических процессов по сравнению с номинальными условиями проведения опытов.

Например, требуется повысить ресурс (время работы) втулок из подшипникового сплава. Анализ априорной информации свидетельствует, что для этого может быть использовано 10 легирующих элементов. Добавляя по очереди по одному легирующему элементу и испытывая сплав, можно найти легирующие элементы, повышающие износостойкость, понижающие ее, и нейтральные. Это требует перебора всех вариантов в одних и тех же условиях.

Гораздо более эффективен метод отсеивающего эксперимента, когда можно сократить время отдельного испытания в результате ужесточения режимов. В нашем примере можно увеличить нагрузку и скорость скольжения в подшипнике, сохранив при этом физическую картину изнашивания.

Таким образом, описанная методика отсеивающего эксперимента предусматривает последовательное испытание каждого элемента из имеющегося априорного информационного множества при более жестких, но строго идентичных условиях и постоянном критерии оценки выходных параметров. Реализация метода вызывает необходимость в решении ряда смежных вопросов.

В связи с тем, что используемые в экспериментальных исследованиях приборы и измерительные каналы имеют погрешность (класс точности), стенды, испытательные машины и установки задают режимы нагружения с некоторыми колебаниями, и, наконец, объекты исследований имеют значительный разброс характеристик, результаты экспериментальных исследований (их выход) являются случайными величинами, колеблющимися в определенных пределах и дающими лишь приближенную оценку параметров. Отсюда следует, что для повышения достоверности и надежности результатов



экспериментальных исследований необходимо привлечение статистических методов и оперирование не единичным выходом, а выборкой (набором результатов). То есть при планировании отсеивающих экспериментов необходимо рассчитать требуемое количество повторений параллельных опытов (объем выборки).

Это выполняется на основе следующих данных:

- требований к точности результатов;
- необходимой достоверности их оценки (для технических параметров обычно 95 %);
- знания типа дифференциальной кривой распределения определяемых величин.

Следует отметить, что при выборках объемом более 30 считают распределение параметров выхода близким нормальному. При меньшем объеме выборки оперируют квантилями распределения Стьюдента.

Поскольку отсеивающие эксперименты очень редко требуют высокой точности, гораздо чаще возникает обратная задача: рассчитать доверительный интервал полученной величины, т.е. определить с выбранной вероятностью ее минимальное и максимальное значения.

Следует иметь в виду, что минимальное количество параллельных опытов равно трем. Объясняется это простой логикой: если у вас двое часов, то неизвестно, какие из них показывают неверное время. Иными словами, при 2-х параллельных опытах грубая ошибка (артефакт) может быть принята за верный результат.

Из-за относительно низкой точности отсеивающих экспериментов величины выходов (даже при нескольких параллельных опытах) при различных значениях переменных факторов могут быть трудно различимы простым сравнением. В этом случае необходимо статистически достоверно установить показатель существенной разницы средних результатов этих выходов, используя квантиль Стьюдента.

#### **2.4 Метод экспертных оценок**

Само название метода свидетельствует о том, что к оценке априорной информации привлечен ряд экспертов. Это могут быть реальные люди (специалисты в данной области) или различные литературные источники (отчеты, статьи, монографии и т.п.), в которых опубликованы результаты подобных или аналогичных исследований.

Один из методов экспертных оценок, используемых для упорядочения исходной информации, называется априорным ранжированием. Он используется при низкой достоверности априорной информации, наглядно описанной логистической кривой (рис.2). При этом экспертная оценка является вероятностной, основанной на способности личности давать полезную информацию в условиях неопределенности. Неизвестная количественная характеристика исследуемого явления рассматривается как случайная величина, отражением точечной оценки которой является индивидуальное мнение специалиста, о значимости того или иного события, процесса, параметра.

Суть ранжирования или распределения по рангам заключается в присвоение отдельным факторам, которые, согласно априорной информации, могут влиять на объект исследования, определенного ранга – порядкового места. Вклад каждого фактора оценивается по величине ранга (порядковому номеру места), который отведен специалистом данному фактору при ранжировании (распределении по местам) всех факторов информационного множества.

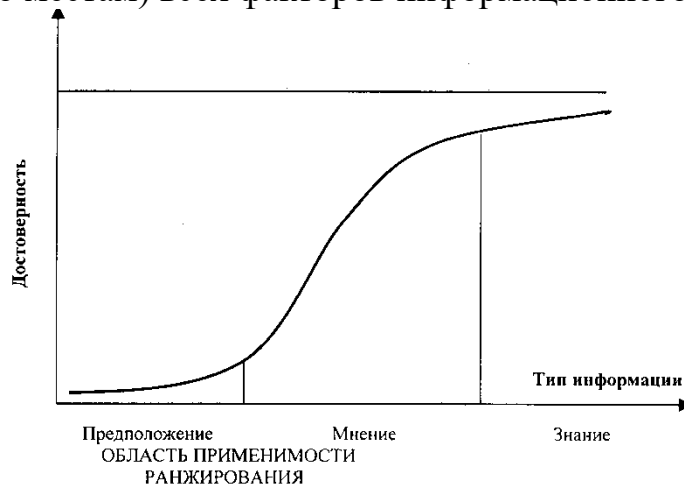


Рисунок 2. Зависимость достоверности информации от ее типа

Ранжирование выполняется с учетом предполагаемого (зачастую количественно неизвестного) влияния каждого фактора на итоговый параметр (выход, результат). Таким образом, экспертами используется определенная шкала порядка, на которой заданный показатель определяет расположение объектов во всей их совокупности в соответствии с принятым масштабом шкалы. То есть каждому объекту соответствует некоторая количественная характеристика или мера. «Когда описание открывает путь для измерения, дискуссии заменяются вычислениями» (американский психолог С. Стивенс), т. е. оценка становится объективной.

Итак, ранжирование – процедура установления относительной значимости (предпочтительности) исследуемых объектов на основе их упорядочения.

Ранг – показатель, характеризующий порядковое место объекта в группе других объектов, обладающих существенными для оценки свойствами.

Точность и надежность процедуры ранжирования в значительной степени зависят от количества ранжируемых объектов. В принципе, чем меньше таких объектов, тем выше их различимость с точки зрения экспертов, а следовательно, тем более надежно можно установить их ранг. Количество ранжируемых объектов, как правило, не должно превышать 20, а наиболее надежные результаты относятся к 10 объектам.

Численность группы экспертов также имеет важное значение. При малом их числе теряется смысл коллективной оценки, так как резко возрастает влияние каждого эксперта. При большом – индивидуальная оценка практически не влияет на групповую и, кроме того, снижает уровень достоверности вследствие привлечения малоквалифицированных специалистов. В общем

случае численность экспертов должна превышать число оцениваемых факторов, но быть меньше общего, потенциально возможного числа специалистов.

Практический выход априорного ранжирования состоит в следующем:

построение априорных диаграмм рангов, что при использовании литературных источников является, по существу, кратким наглядным обзором по теме исследований;

отбор наиболее значимых для исследования факторов, что сокращает объем и повышает эффективность исследований.

Таким образом, априорное ранжирование, являясь субъективным мнением экспертов в данной области, дает, тем не менее, объективную информацию, так как мнение специалистов объективно отражает реальное положение вещей в рассматриваемой области знаний.

Алгоритмизированная методика априорного ранжирования может быть представлена в виде нижеследующих основных этапов. В методике имеется реальный численный пример.

1. Постановка задачи исследований.
2. Выбор параметров выхода или отклика.
3. Составление перечней факторов, влияющих на изучаемый процесс.
4. Операционное определение факторов. Это определение вводится для однозначного понимания специалистами каждого фактора.
5. Установление интервалов варьирования отдельных факторов. Это связано с тем, что влияние отдельных факторов может быть различным в разных областях факторного пространства.
6. Ранжирование факторов в порядке убывания их воздействия на параметр выхода.

Каждому фактору из общего перечня присваивается ранг (цифра натурального ряда), соответствующий месту, отведенному исследователем данному фактору в ранжируемом ряду (наиболее важный фактор – 1, менее важный – 2, еще менее важный – 3 и т.д.).

7. Формальная проверка ранжирования.

Сумма рангов в каждом столбце

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^n a_i, \quad (1)$$

где  $n$  – число рассматриваемых факторов.

8. Определение суммы рангов по факторам.

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j}, \quad (2)$$

где  $a_{i,j}$  – ранг каждого  $i$ -го фактора у  $j$ -го специалиста (или по  $j$ -му источнику литературы);  $m$  – количество опрошенных экспертов (или рассмотренных литературных источников).

9. Определение средней суммы рангов.

$$\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{i,j}}{n} = m \left( \frac{n+1}{2} \right). \quad (3)$$

10. Определение абсолютной величины разности между каждой суммой рангов по факторам и средней суммой рангов.

$$\Delta_i = \left| \sum_{j=1}^m a_{i,j} - \bar{T} \right|. \quad (4)$$

11. Определение квадрата разностей.

$$\Delta_i^2. \quad (5)$$

12. Определение суммы квадратов разностей.

$$S_w = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2. \quad (6)$$

13. Определение показателей групп связанных рангов.

$$\gamma_{(k)_j} = t_k^3 - t, \quad (7)$$

где  $t$  – количество одинаковых связанных рангов в  $j$ -м ранжировании;  
 $k$  – индекс величины одинаковых связанных рангов в  $j$ -м ранжировании.

14. Определение суммарного показателя связанных рангов по ранжированию.

$$T_j = \sum_{l=1}^p \gamma_{(k)_{jl}}, \quad (8)$$

где  $p$  – число групп одинаковых связанных рангов в  $j$ -м ранжировании.

15. Определение суммы суммарных показателей связанных рангов.

$$\sum_{j=1}^m T_j. \quad (9)$$

16. Определение коэффициента конкордации.

$$W = \frac{12 S_w}{m^2 (n^3 - n) - m \sum_{j=1}^m T_j}. \quad (10)$$

Коэффициент конкордации  $W$  меняется от 0 до 1, причем равенство единице означает, что все эксперты дали одинаковые оценки по данному признаку, а равенство нулю означает, что связь между оценками, полученными от разных экспертов, не существует.

17. Предварительная оценка коэффициента конкордации.

18. Определение значимости коэффициента конкордации.

При числе факторов меньше или равном семи можно пользоваться специальной таблицей (расчетное  $S_w$  должно быть больше критического, табличного). При большем числе факторов достаточно, чтобы значение расчетного  $\chi_p^2$  критерия было больше значения табличного  $\chi_T^2$  критерия для соответствующей степени свободы ( $v$ ) и доверительной вероятности ( $p$ ), обычно принимаемой 0,95 или 0,99.

$$v = n - 1, \quad (11)$$

$$\chi_p^2 = \frac{12 S_w}{mn(n+1) - \frac{1}{(n-1)} \sum_{j=1}^m T_j} = m(n-1)W. \quad (12)$$

Примечание: при отсутствии связанных рангов величина  $\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^m T_j$  обра-

щается в нуль.

#### 19. Построение априорных диаграмм рангов.

Получение значимого коэффициента конкордации (т.е. подтверждение согласованности мнений специалистов) дает возможность построить среднюю априорную диаграмму рангов в координатах: ордината – сумма рангов; абсцисса – ранжируемые объекты (факторы). Чем меньше сумма рангов данного фактора, тем выше его место на диаграмме (рис.3).

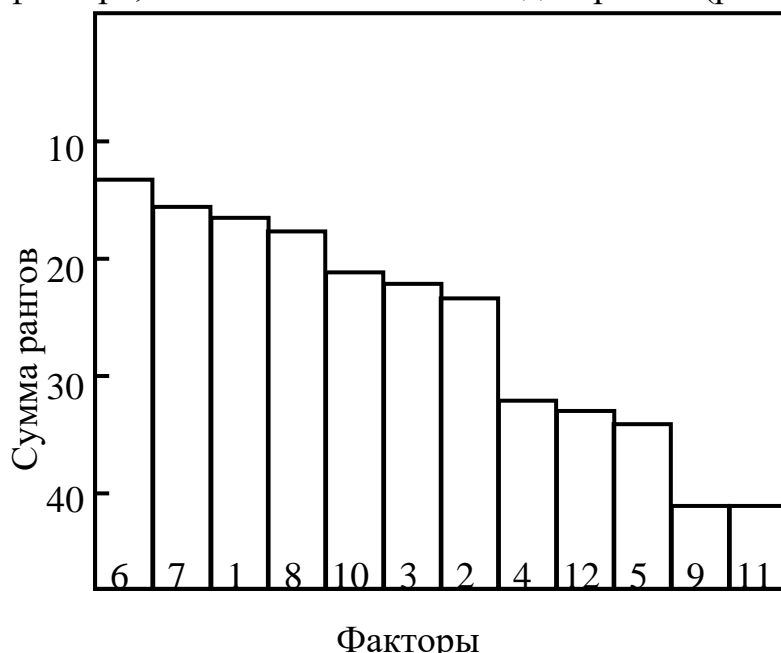


Рисунок 3. Диаграмма рангов

#### 20. Принятие решений по стратегии последующего эксперимента:

Диаграмма рангов может иметь следующий вид:

20.1. Распределение (различие в рангах) факторов и их убывание равномерное. В этом случае уровень априорной информации весьма низок, и поэтому все факторы должны включаться в эксперимент.

20.2. Распределение равномерное, а убывание неравномерное. В этом случае, если возможно, лучше включить в физический эксперимент все факторы, но возможен и априорный отсев их.

20.3. Распределение неравномерное, а убывание равномерное. Возможен априорный отсев факторов с низким рангом.

20.4. Распределение и убывание неравномерное (например, экспоненциальное). Это наиболее благоприятная ситуация, так как нужно отсеять ряд факторов, отнесенных к шумовому полю.

### 2.5 Метод случайного баланса

Еще одним методом, предваряющим углублённые экспериментальные исследования, является метод случайного баланса, предложенный Сат-

терзвайтом в 1956 г. По мнению В.В. Налимова (МГУ), метод случайного баланса – это попытка формализовать психофизиологические приёмы выделения существенных факторов, которые используют экспериментаторы, основываясь на своих знаниях, опыте и интуиции.

Дело в том, что первая часть метода – это оперирование исследователя с диаграммой рассеяния – субъективная процедура, основанная на его опыте и интуиции. Второй этап – обычный регрессионный анализ.

Сложные объекты характеризуются большим числом количественных и качественных факторов. Очень часто факторы влияют на выходной параметр не прямо, а косвенно – через эффекты взаимодействий. При варьировании факторов всего на двух уровнях, даже для относительно небольшого их количества, например 17, общее число отдельных опытов достигает  $2^{17} = 13072$ , т.е. полный перебор вариантов невозможен. Главной целью метода случайного баланса является выделение из множества факторов, влияющих на выход, наиболее значимых.

Метод может быть использован активно и пассивно. Активная реализация метода предусматривает постановку серии опытов по специальным планам и примыкает к экспериментальным исследованиям. Пассивное использование этого метода, основанное на обработке данных литературных источников, результатов чужих или промышленных экспериментов, проведённых на случайно выбранных уровнях, позволяет обрабатывать априорную информацию. То есть метод случайного баланса может быть использован для обработки готовых массивов экспериментальных данных.

В основу метода положен постулат: факторы, расположенные в порядке возрастания влияния на суммарную дисперсию выхода, образуют ранжированный ряд, описываемый затухающей экспонентой. Основная идея метода – это сочетать все факторы случайным образом при возможно наибольшем интервале варьирования (их влияние становится шумовым полем). Тогда последующая обработка позволит выделить наиболее существенный фактор при его переходе с одного уровня на другой. Сущность такого подхода заключается в предположении, что можно построить кривую распределения значений параметра выхода при фиксации всех переменных факторов, за исключением одного, на постоянном уровне. Если этот фактор влияет существенно, то при его переходе с одного уровня на другой произойдёт смещение центра распределения параметра выхода на некоторую величину. По оценке этого смещения осуществляется отбор наиболее значимых факторов.

Использование в методе случайного баланса случайных, а не систематических выборок, позволяет считать обрабатываемые наборы факторов слабо коррелированными между собой. При этом совместные оценки оказываются смешанными случайным образом, что позволяет почти независимо оценить все преобладающие факторы.

Следует отметить, что в методе случайного баланса используются сверхнасыщенные планы, когда число опытов  $N$  меньше числа факторов  $K$ , то есть число степеней свободы отрицательно ( $f = N - K < 0$ ). Это не позволяет

дать строгую количественную оценку влиянию факторов, но для отсеивающих экспериментов это и не нужно.

Следовательно, метод случайного баланса является достаточно грубым: имеет малую чувствительность – способность выделять отличные от нуля коэффициенты уравнения регрессии, но, одновременно, обладает большой разрешающей способностью – возможностью выделять главные эффекты среди их значительного общего числа.

В методе случайного баланса в качестве центра распределения используют не среднее арифметическое, а медиану, так как она более эффективна при отклонениях закона распределения от нормального. Медиана – значение случайной величины, разделяющее общее количество результатов пополам.

Критериями существенности фактора являются:

- абсолютная величина вклада фактора в параметр выхода (разность частных медиан);
- число выделяющихся точек на диаграмме рассеяния для каждого фактора.

Диаграмма рассеяния имеет на абсциссе порядковый номер фактора  $x_i$  с указанием двух его уровней (наименьшего и наибольшего), а на ординате – значение выхода  $y$  в виде точки. Причём слева нанесён выход при нижнем уровне фактора (–), а справа – при верхнем (+). Выделяющиеся точки диаграммы рассеяния располагаются выше самой верхней или ниже самой нижней точки выхода, находящейся на противоположном уровне того же фактора.

Рассмотрим общую схему метода. Предполагая, что выход – случайная величина, зависящая от набора факторов, можно построить регрессионную модель в виде полинома. Разобьём все факторы на группу существенных  $x_j$  и несущественных  $x_i$ . После этого сверхнасыщенный план (опытов меньше, чем факторов) становится насыщенным по отношению к значимым факторам.

В этом случае уравнение регрессии можно записать в виде

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{K_1} b_j x_j + \sum_{i=1}^{K_2} b_i x_i + \varepsilon, \quad (4.26)$$

где  $K=K_1+K_2$  – общее количество факторов;  $\varepsilon$  – случайная составляющая.

При этом дисперсия учитывает все эффекты  $b_i$ , из которых пока ещё не выделены существенные и случайные составляющие. Эта остаточная дисперсия, в оценку которой входят значимые, но ещё не выделенные факторы, вначале велика. При удалении шаг за шагом значимых эффектов её величина уменьшается. Процесс выделения значащих факторов продолжают до тех пор, пока величина остаточной дисперсии не станет соизмеримой с дисперсией воспроизводимости опыта. В итоге получим приближённую математическую модель связи выхода со значащими факторами и количественную оценку их вкладов.

Метод случайного баланса может быть использован при числе факторов более 70. Однако факторов, существенно влияющих на параметр выхода, должно быть не более 10-25%. Прочие – могут быть отнесены к шумовому

полю – совокупности случайных помех, малозначимых линейных эффектов и их взаимодействий.

Следует отметить, что приближённая регрессионная модель связывает переменные факторы с параметром выхода, не раскрывая физической сущности, происходящих внутри исследуемого объекта процессов. Правда, «люди не станут отказываться от своего обеда только потому, что не полностью понимают процесс пищеварения», – заметил О. Хевисайд. А принцип «чёрного ящика» – весьма эффективный инструмент в самых различных областях исследований.

Методика случайного баланса разбита на две части. Первая часть, приведённая в настоящем разделе, заканчивается выделением наиболее значащих факторов и парных взаимодействий. Вторая, заключительная часть методики, может быть освоена после изложения материала о планировании многофакторных экспериментов и регрессионном анализе.

Рассмотрим алгоритм формализованных процедур, включающий последовательную цепь этапов:

**1. Постановка задачи исследований.**

Выделение доминирующих факторов из априорной информации об объекте исследований.

**2. Выбор параметра выхода  $y_j$ .**

**3. Выбор переменных факторов  $x_i$ .**

Отбираем все факторы, которые по данным имеющихся экспериментов или литературы могут влиять на выход.

**4. Составление матрицы случайного баланса**

**5. Построение матрицы случайного баланса с ранжированным выходом.**

**6. Выделение факторов с наибольшим вкладом.**

Выявление факторов с наибольшим вкладом в параметр выхода определяется на основе разности оценок частных медиан по значениям фактора на уровне «+» и на уровне «-».

$$V_{x_i} = M_{x_i+} - M_{x_i-}, \quad (4.27)$$

где  $V_{x_i}$  – вклад фактора  $X_i$ ;  $M_{x_i+}, M_{x_i-}$  – оценки частных медиан по разным уровням факторов (верхнем и нижнем).

**7. Построение диаграммы рассеяния.**

**8. Анализ диаграммы рассеяния.**



### 3. ПЛАНИРОВАНИЕ ОДНОФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Однофакторными считаем экспериментальные исследования, когда планируемое возмущающее воздействие направлено только на один фактор, а прочие – поддерживаем на постоянном уровне или, если это невозможно, относим к шумовому полю. Иными словами, варьировем только один из переменных факторов, а если их несколько, то изменение их уровней осуществляем поочерёдно. Ниже рассмотрены несколько типов однофакторных экспериментов.

#### 3.1 Классический эксперимент

Классическим называют наиболее старый метод планирования и реализации экспериментов. Он предусматривает фиксирование на определённых уровнях всех переменных факторов, кроме одного, который принимает некоторые дискретные значения (уровни) в исследуемой части области своего существования. В результате находим зависимость исследуемой величины (параметра выхода) только от одного фактора. Математическая модель этой зависимости может быть получена в результате ряда геометрических построений или, чаще всего и с гораздо меньшей погрешностью, методом наименьших квадратов.

Поскольку этот метод не определяет структуру получаемой однофакторной модели и требует наличия перенасыщенной системы уравнений (число уравнений превышает число неизвестных) для вычисления параметров, на количество уровней переменного фактора налагаются определённые ограничения.

Если выход изменяется по закону, близкому к линейному, то для нахождения параметров линейной модели достаточно трёх точек на линии отклика. То есть достаточно варьировать переменный фактор на трёх дискретных уровнях. Однако вид линии отклика экспериментатору зачастую неизвестен. В этом случае естественное стремление сократить объём экспериментов вступает в противоречие с последующей возможностью функциональной или графической интерпретации их результатов. Последние могут подчиняться более сложному закону, (например, квадратичному) с большим числом параметров. Это обстоятельство заставляет планировать однофакторный эксперимент как минимум на четырёх уровнях переменного фактора. А при имеющейся опасности срыва одного из опытов необходимо предусмотреть пятую резервную точку.

Следует отметить, что если нелинейную экспериментальную зависимость линеаризовать логарифмированием (отложив на графике в логарифмическом масштабе), то можно для аппроксимации экспериментальных результатов использовать степенную или показательную функции.

Например, из

$$y = ab^x \quad (5.1)$$

имеем  $\lg y = \lg a + x \cdot \lg b$ , что эквивалентно линейной зависимости  $Y = A + xB$  при оперировании не самим результатом эксперимента, а его логарифмом.

Вычисления по определению параметров модели методом наименьших квадратов удобно выполнять в виде таблицы (табл.5.1).

**Таблица 5.1**  
Вычисление параметров модели

№ п/п	x	x <sup>2</sup>	y	x·y	x <sup>3</sup>	x <sup>4</sup>	x <sup>2</sup> y
1	2	3	4	5	6	7	8
:	:	:	:	:	:	:	:
N	Σx	Σx <sup>2</sup>	Σy	Σx·y	Σx <sup>3</sup>	Σx <sup>4</sup>	Σx <sup>2</sup> y

Для линейной модели  $y = ab^x$  (достаточно столбцов 1-5) имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} bN + a\Sigma x = \Sigma y; \\ b\Sigma x + a\Sigma x^2 = \Sigma xy, \end{cases} \quad (5.2)$$

решая которую, находим параметры модели «a» и «b».

Квадратичная модель  $y = ax^2 + bx + c$  требует следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} a\Sigma x^2 + b\Sigma x + cN = \Sigma y; \\ a\Sigma x^3 + b\Sigma x^2 + c\Sigma x = \Sigma xy; \\ a\Sigma x^4 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^2 = \Sigma x^2y. \end{cases} \quad (5.3)$$

Критерием выбора той или иной модели является погрешность аппроксимации.

Мерой оценки рассеяния параметра выхода является дисперсия воспроизводимости – средняя дисперсия всех опытов.

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^n (y_u - \bar{y})^2}{N(n-1)}, \quad (5.4)$$

где  $u$  – количество параллельных опытов (1...n);  $i$  – количество уровней переменного фактора (точек на кривой отклика) (1...N);  $\bar{y}$  – среднее значение выхода из серии параллельных опытов.

В однофакторных экспериментах дисперсия коэффициентов модели, полученных методом наименьших квадратов, равна

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{2}. \quad (5.5)$$

Эта дисперсия позволяет оценить значимость коэффициентов модели.

Проведя необходимое для исследуемого объекта число однофакторных экспериментов, получим набор частных однофакторных моделей. Их можно объединить в общую многофакторную модель.

*Пример:*

Дано: частные модели вида:

$$P_Z = at^{x_p}; \quad (5.6)$$

$$P_Z = bS^{y_p}; \quad (5.7)$$

$$P_Z = cHB^n. \quad (5.8)$$

1. Приведём любые два выражения (5.7) и (5.8) к безразмерному виду, разделив на величину выхода, соответствующую условиям проведения первого эксперимента, то есть значениям  $S_1$  и  $HB_1$ :

$$m_1 = \frac{bS^{y_p}}{bS_1} = M_1 S^{y_p}; \quad m_2 = \frac{cHB^n}{cHB_1} = M_2 HB^n. \quad (5.9)$$

2. Умножим правую часть частной модели (5.6) на полученные зависимости (5.9).

$$P_Z = at^{x_p} M_1 S^{y_p} M_2 HB^n = C_p t^{x_p} S^{y_p} HB^n, \quad (5.10)$$

где  $C_p = aM_1M_2$  – новая константа.

Основное достоинство изложенного метода – это его простота. Он может быть рекомендован для исследования простейших объектов и построения тарифовочных зависимостей.

К недостаткам метода можно отнести следующие:

- значительные затраты времени (большое число опытов);
- неэкономичность;
- наличие систематических ошибок;
- отсутствие учёта смешанных взаимодействий.

Совершенствование экспериментальных методик пошло по нижеследующим направлениям.

Для компенсации первого и второго недостатков были разработаны устройства, позволяющие вести эксперименты одновременно при разных значениях факторов.

Для повышения точности (третий недостаток) увеличивали количество параллельных опытов. Минимальное число параллельных опытов равно трём.

Наконец, для компенсации четвертого недостатка были разработаны более сложные планы при одновременном изменении нескольких факторов, то есть многофакторные.

Остановимся подробнее на очень важной процедуре, называемой рандомизацией. При проведении исследований экспериментатору зачастую могут быть неизвестны все факторы, влияющие на выход, или ряд известных факторов им не может быть учтён. Примеры подобных факторов – это скачки напряжения электросети днём и вечером, особенности зрения одного из операторов, считывающих показания приборов, изменение температуры воздуха и тому подобное. Изменение выходного параметра исследуемого объекта по какой-либо координате (например, времени или температуре), не связанное с действиями экспериментатора, называется дрейфом и является источником систематических ошибок. Последние вызывают смещение оценок коэффициентов моделей.

Основным способом уменьшения ошибки экспериментатора из-за влияния источников неоднородности (систематических ошибок) является рандомизация – искусственное превращение систематических ошибок в случайные. Это достигается построением последовательности проведения отдельных опытов по таблицам случайных чисел. Рассмотрим рандомизацию на примере. Пусть нужно изучить влияние конструкции пульта управления В на время выполнения операции Т. Здесь источником неоднородности является оператор О, рис.5.1.

Ограничение на рандомизацию заключается в том, что экспериментатор на основании априорной информации об источниках неоднородности чётко формулирует требования к плану эксперимента, полностью исключающие источники неоднородности различных типов (дискретные и непрерывные).

Вариант конструкции	Время операции		
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>
V <sub>1</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>1</sub>
V <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>
V <sub>3</sub>	O <sub>3</sub>	O <sub>3</sub>	O <sub>3</sub>
V <sub>1</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>
V <sub>2</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>
V <sub>3</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>
V <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	O <sub>1</sub>
V <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>
V <sub>3</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>3</sub>
V <sub>1</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>
V <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	O <sub>3</sub>	O <sub>1</sub>
V <sub>3</sub>	O <sub>3</sub>	O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>

Эксперимент не рандомизирован по конструкции, т.е. конструкция В зависит от оператора О.

Эксперимент не рандомизирован по времени, т.е. время Т зависит от оператора О.

Рандомизация по конструкции В и по времени Т.

Рандомизация с ограничением. Оператор встречается только 1 раз в строке и в столбце.

Рис. 5.1. Схемы однофакторных планов

## 5.2. Комбинированные взаимноортогональные квадраты

Этот метод является одним из способов планирования однофакторных экспериментов с ограничением на рандомизацию.

Исторические истоки метода восходят к числовым комбинаторным задачам. Так, Л. Эйлером в 1779 году рассматривалась задача о возможности построения 36 офицеров в каре так, чтобы в каждом ряду и в каждой шеренге было бы по одному

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

Рис. 5.2. Латинский квадрат 4×4

офицеру каждого полка и каждого чина. Эйлер предположил невозможность такого строя.

Исходной для построения плана является квадратная таблица, содержащая «N» строк и «n» элементов, в которой любой из элементов встречается в каждой строчке и в каждом столбце один и только один раз. Латинским квадрат называют в связи с тем, что комбинации элементов внутри него обозначают буквами латинского алфавита (рис. 5.2).

Два латинских квадрата (рис.5.3,а,б) ортогональны, если при наложении одного квадрата на другой каждая пара элементов встречается в таблице только один раз (рис.5.3,в).

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

a)

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

б)

11	22	33	44
23	14	41	32
34	43	12	21
42	31	24	13

в)

Рис. 5.3. Ортогональные латинские квадраты 4×4

Перестановка строк, столбцов или буквенных символов преобразует любой латинский квадрат в новый. Для квадрата 2×2 возможны два варианта (рис.5.4), 3×3 – 12 вариантов, 4×4 – 576, 5×5 – 161280.

Для некоторых (не всех) латинских квадратов можно построить второй квадрат, ортогональный первому. То есть каждая буква этого нового квадра-

А	В
В	А

В	А
А	В

Рис. 5.4. Варианты латинского квадрата 2×2

та встречается не только один раз в каждой строке и один раз в каждом столбце, но также один раз с каждой буквой латинского квадрата. Это ортогональные квадраты более высокого порядка, греко-латинские (рис. 5.5). Пример их использования понятен из следующего примера. Пусть I–V – варианты технологического процесса, 1–5 – тип детали, А–Д – способ контроля, а  $\alpha$ – $\delta$  – чувствительность прибора. Здесь одновременно будут исследованы два множества: способ контроля и чувствительность прибора.

Всю массу различных экспериментов Ф. Анскомб (1948 г.) условно разделил на две группы:

- оценивание величин констант;
- сравнительные эксперименты.

Комбинаторика латинских квадратов используется чаще всего для экспериментов сравнительного типа.

Описанный метод планирования экспериментов при исследовании влияния данного фактора на изучаемый объект обеспечивает гарантированное усреднение влияния всех остальных факторов. Кроме того, этот метод позволяет сократить общее количество опытов в  $n^{m-2}$  раз. Здесь  $m$  – число переменных факторов, а  $n$  – количество уровней каждого фактора.

Как и в предыдущем случае, существенна роль рандомизации. В.Кохрен и Ж. Кокс считают рандомизацию аналогом страхования. Зло возникает редко, но если оно возникло, его нужно компенсировать.

	1	2	3	4	5
I	Aβ	Eγ	Dα	Cδ	Bε
II	Ca	Dε	Aγ	Bβ	Eδ
III	Bγ	Aδ	Cε	Eα	Dβ
IV	Eε	Cβ	Bδ	Dγ	Aα
V	Dδ	Bα	Eβ	Aε	Cγ

Рис. 5.5. Греко-латинский квадрат 5×5

Говоря при рассмотрении классического эксперимента о рандомизации, мы уже сводили эксперименты в блоки – комбинации строк и столбцов.

Латинский квадрат является расположением элементов, позволяющим учитывать два множества блоковых ограничений (строки и столбцы), которые должны быть использованы одновременно. Например, квадрат 4×4 на рис.5.3,а.

Достоинствами планирования экспериментов по латинским квадратам в сравнении с классическим являются:

- сокращение количества экспериментов;
- возможность исследования некоторых многофакторных систем.

К недостаткам метода можно отнести:

- отсутствие статистически обоснованных результатов (выход зависит от неконтролируемых факторов);
- ограниченная область применимости (невозможность построить ортогональные квадраты 6×6);
- несовершенство методов построения эмпирических моделей.

Рассмотрим подробно формализованную рабочую методику планирования рационального эксперимента по ортогональным латинским квадратам.

1. Задаёмся параметром выхода исследуемого объекта.

$y$  – параметр выхода.

2. Выбираем количество переменных факторов, влияющих на выход.

$m = 4$  (a, b, c, d).

3. Задаём число уровней каждого фактора.

$n = 3$ .

4. Строим вспомогательную таблицу – большой комбинационный квадрат с количеством всех возможных комбинаций опытов  $3^4 = 81$ , т.е. имеется 81 клетка – потенциальный опыт.

Это число можно сократить в  $3^{4-2} = 9$  раз, и количество опытов будет равно 9 (рис.5.6).

		1			2			3		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	a									
	b									
	c									
2	d									
	1									
	2									
3	1									
	2									
	3									

Рис.5.6.Большой комбинационный квадрат

### 5. Строим план эксперимента.

Используем способ, заключающийся в размещении диагональных клеток отдельного среднего квадрата в столбцах и строках большого комбинационного квадрата.

5.1. Строим средний квадрат и нумеруем его клетки слева направо, сверху вниз.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

5.2. Достаиваем его наддиагональным рядом сверху (2; 4) и поддиагональным рядом снизу (6; 8).

		4		
	1	2	3	
2	4	5	6	8
	7	8	9	
		6		

5.3. Считываем последовательно диагональные ряды, как показано на схеме:

1-й ряд – средняя диагональ сверху вниз, слева направо – 1, 5, 9;

2-й ряд – средняя диагональ снизу вверх – 7, 5, 3;

3-й ряд – под диагональю сверху вниз – 2, 7, 6;

4-й ряд – над диагональю сверху вниз – 4, 3, 8.

5.4. Заносим ряды цифр в большой комбинационный квадрат (рис.5.7) в следующем порядке:

1-й ряд – в средний (второй) столбец сверху вниз;

2-й ряд – в среднюю (вторую) строку слева направо;

3-й ряд – в левый (крайний) столбец снизу вверх;  
4-й ряд – в правый (крайний) столбец снизу вверх.

c	a	1			2			3		
	d b	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1				1					
	2			6						
	3								8	
2	1									3
	2					5				
	3	7								
3	1		2							
	2							4		
	3						9			

Рис.5.7. Вариант заполнения комбинационного квадрата

Причём, каждая цифра ставится в ту клетку одного среднего квадрата, номер которой соответствует этой цифре (нумерация клеток в подпункте 5.1). При этом в каждом столбце и в каждой строке большого квадрата должна быть только одна занятая клетка.

5.5 Выполняем проверку на независимость изменения факторов.

a = 1			a = 2			a = 3		
b	3, 1, 2	1, 2, 3	2, 3, 1	a	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3	
c	1, 2, 3	1, 2, 3	1, 2, 3	b	3, 1, 2	1, 2, 3	2, 3, 1	
d	2, 3, 1	1, 2, 3	3, 1, 2	d	2, 1, 3	3, 2, 1	1, 3, 2	

Недостатком построенного комбинационного квадрата является *монотонное* изменение уровней нескольких факторов (для ряда частей квадрата), приводящее к утрате независимости изменения факторов.

5.6 Преобразуем комбинационный квадрат.

5.6.1. Переставим 1-ю и 3-ю строки (по c), рис.5.8,а.

5.6.2. Переставим 1-й и 3-й столбцы (по a), рис.5.8,б.

c	a	1			2			3		
	d b	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1		2							
	2							4		
	3						9			
2	1									3
	2					5				
	3	7								
3	1				1					
	2			6						
	3								8	



a)

c	a		1			2			3		
	d	b	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1									2	
	2	4									
	3							9			
2	1			3							
	2						5				
	3								7		
3	1				1						
	2										6
	3		8								

б)

Рис.5.8. Преобразованный комбинационный квадрат  
5.6.3. Выполним проверку.

a = 1			a = 2			a = 3		
b	1, 3, 2		3, 2, 1			2, 1, 3		
c	1, 2, 3		1, 2, 3			1, 2, 3		
d	2, 1, 3		3, 2, 1			1, 3, 2		

c = 1			c = 2			c = 3		
a	1, 2, 3		1, 2, 3			1, 2, 3		
b	1, 3, 2		3, 2, 1			2, 3, 1		
d	2, 3, 1		1, 2, 3			3, 1, 2		

Получим удовлетворительный план в виде заштрихованных клеток комбинационного квадрата, рис.5.9.

c	a		1			2			3		
	d	b	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1										
	2										
	3										
2	1										
	2										
	3										
3	1										
	2										
	3										

Рис.5.9. План эксперимента

При этом для каждого значения одного фактора значения других встречаются одинаково часто.

Например:

$$\text{для } a=1 \begin{cases} b=1,3,2; \\ c=1,2,3; \\ d=2,1,3; \end{cases} \quad \text{для } a=2 \begin{cases} b=3,2,1; \\ c=1,2,3; \\ d=3,2,1. \end{cases}$$

Поэтому при определении зависимости выхода от фактора «а» в виде  $y = f(a)$  влияние факторов «b», «с», «d» усредняется.

5.7 Строим матрицу планирования, выписывая условия эксперимента (уровни всех факторов) из большого квадрата по строкам или столбцам, и реализуем эксперимент (табл.5.2).

Таблица 5.2

Матрица плана эксперимента

№ п/п	Уровни факторов				Вы- ход
	a	b	c	d	
1	1	1	1	2	$y_1$
2	2	3	1	3	$y_2$
3	3	2	1	1	$y_3$
4	1	3	2	1	$y_4$
5	2	2	2	2	$y_5$
6	3	1	2	3	$y_6$
7	1	2	3	3	$y_7$
8	2	1	3	1	$y_8$
9	3	3	3	2	$y_9$

6. Обрабатываем результаты эксперимента.

6.1. Группируем результаты по значениям каждого фактора (табл.5.3).

При  $n = 3$  каждому значению любого фактора будет соответствовать три значения выхода. При заполнении таблиц следует обращать внимание только на уровни тех факторов, которые есть в таблицах.

Таблица 5.3

Группировка выхода по факторам

b	a			сре дн.
	1	2	3	
1	$y_1$	$y_8$	$y_6$	$\bar{y}_{1b}$
2	$y_7$	$y_5$	$y_3$	$\bar{y}_{2b}$
3	$y_4$	$y_2$	$y_9$	$\bar{y}_{3b}$
ср	$\bar{y}_{1a}$	$\bar{y}_{2a}$	$\bar{y}_{3a}$	

d	c			сре дн.
	1	2	3	
1	$y_3$	$y_4$	$y_8$	$\bar{y}_{1d}$
2	$y_1$	$y_5$	$y_9$	$\bar{y}_{2d}$
3	$y_2$	$y_6$	$y_7$	$\bar{y}_{3d}$
ср	$\bar{y}_{1c}$	$\bar{y}_{2c}$	$\bar{y}_{3c}$	

6.2. Строим графики эмпирических зависимостей: ордината – средние выходы по фактору; абсцисса – уровни фактора (рис.5.10).

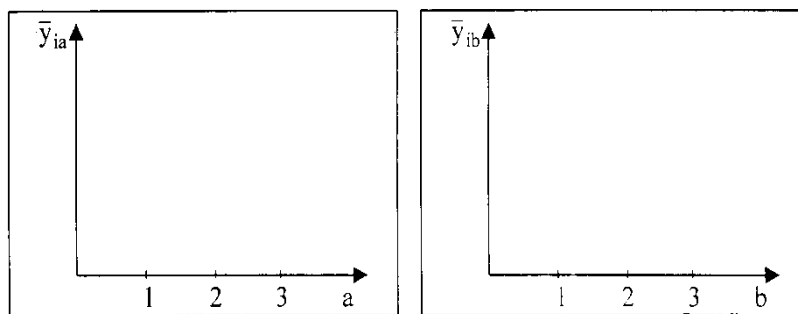


Рис.5.10. Координаты графиков выхода

6.3. Аппроксимируем полученные зависимости методом наименьших квадратов. Получаем частные эмпирические модели:

$$\bar{y}_a = f_1(a); \quad \bar{y}_b = f_2(b); \quad \bar{y}_c = f_3(c); \quad \bar{y}_d = f_4(d).$$

6.4. Строим общую многофакторную модель, перемножая частные модели после их представления в безразмерном виде.

В настоящем разделе представлены наиболее простые схемы планирования экспериментов, что и является их самым главным преимуществом.

## 6. ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Многофакторным считаем эксперимент, когда планируемое возмущающее воздействие направлено одновременно на несколько переменных факторов. Причем, регрессионная модель исследуемого объекта может включать не только все переменные, но и эффекты их взаимодействий.

### 6.1. Полнофакторный эксперимент

Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней выбранных факторов, называется полным факторным экспериментом.

#### 6.1.1. Возникновение метода

Планирование многофакторных экспериментов является продуктом нашего времени, но истоки его возникновения весьма дальние. Они восходят к различным задачам комбинаторного анализа, заложенного Г. Лейбницем, к развитию теории вероятностей, обсужденной в письмах между П. Ферма и Б. Паскалем, теории приближения функций степенными рядами (Л. Эйлер). Существенный вклад внесли Э. Лежандр и К.Гаусс, обосновавшие с вероятностных позиций метод наименьших квадратов.

В физике Дж. Гиббс ввел представление о поверхности отклика и вместе с Л. Больцманом утвердил приоритет в природе статистических, а не детерминированных закономерностей.

Возникновение и развитие статистических методов планирования многофакторных экспериментов связано с именем Р. Фишера, издавшего в 1935 году монографию, посвященную планированию эксперимента и давшую название всему направлению. Фишеру принадлежит и термин “дисперсия”. Ф. Йетс предложил для полнофакторного эксперимента простую расчетную схему.

В 1945 году Д. Финни ввел дробные реплики, что позволило резко сократить число экспериментов.

Построение современной теории планирования эксперимента завершилось в 1947 году после создания Н. Винером кибернетики и формулирования им понятия “черный ящик”.

В России значительные разработки в области теории и практики планирования многофакторного эксперимента выполнены под руководством В.В. Налимова в МГУ.

В настоящее время можно с уверенностью утверждать, что разработаны все основные положения новой дисциплины “Математическая теория эксперимента”.

### **6.1.2. Основные термины и понятия**

Цель любого экспериментального исследования – это раскрытие некоторых закономерностей функционирования рассматриваемых систем, т.е. нахождение функциональной связи, аппроксимирующей реальную зависимость между выходом и независимыми факторами. Эксперимент, в котором используется закономерное варьирование различных двух или более независимых факторов, называется многофакторным. Количество факторов обозначается буквой “ $k$ ”.

Выход – это результат, численная характеристика цели исследования. Эквивалентными терминами являются: выходной параметр, критерий оптимизации, отклик, значение целевой функции и т.д. Обозначается буквой “ $y$ ”.

Геометрическая интерпретация выхода представляет собой поверхность отклика (при двух факторах) или гиперповерхность отклика (более двух факторов).

Алгебраическая интерпретация выхода представляет собой функцию отклика или математическую модель процесса (уравнение регрессии, регрессионную модель).

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая определенные значения и воздействующая на рассматриваемую систему, т.е. на объект исследований. Обозначается буквой “ $x$ ”.

Подавляющее число изучаемых объектов относится к классу сложных систем. В общем случае любой объект исследований можно представить в

виде некоторого множества точек в факторном пространстве, которое может быть условно разбито на два подмножества: “черное” и “светлое”.

Первое, называемое “черным ящиком”, представляет собой кибернетическое понятие системы с неполным знанием механизма ее функционирования. В этом случае структура математической модели процесса неизвестна и модель может быть представлена в виде некоторой аппроксимирующей функции. “Светлый ящик” – подмножество с известным механизмом процесса, традиционными экспериментальными задачами и известной структурой модели, например, в виде различных физических законов.

На процесс исследований всегда накладываются ограничения, определяемые возможностями измерительной аппаратуры, стремлением к снижению временных затрат на постановку опытов и материальных – на материалы и приборы. Эти ограничения приводят к тому, что исследователь всегда располагает относительно небольшим объемом экспериментальных данных, на основании которых он должен делать выводы о свойствах и поведении объекта изучения. На результаты опытов, кроме того, влияет большое число случайных неуправляемых факторов. Последнее обстоятельство требует включения в рассмотрение не только оценки результатов, но и оценки их точности. Следовательно, необходима статистическая обработка данных.

Традиционными методами можно получить такие же результаты, как и многофакторными экспериментами. Однако там нет такой четкости и логически упорядоченной стратегии, так как исследователь ведет поиск, руководствуясь только своей интуицией. Это приводит, как правило, к постановке многих лишних опытов при снижении точностных характеристик выхода.

Кроме того, при планировании и реализации многофакторных экспериментов оценка параметров и установление доверительных границ для них производится по стандартной методике, что обеспечивает сопоставимость результатов данных исследователей на разном оборудовании, в разных странах.

Таким образом, математическое планирование экспериментов – это процедура выбора числа и условий постановки опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью, методов обработки результатов и принятия решений.

### **6.1.3. Критерии оптимальности факторных планов**

Рассматривая планирование экспериментов как аналог раздела прикладной математики, можно сформулировать ряд положений, играющих роль аксиом. Этими положениями являются критерии оптимальности эксперимента. Все их можно условно разделить на две группы: статические и динамические.

Первые образуют мозаику взаимно несовместимых положений, из которых можно выделить лишь иерархически более важные.

Вторые – определяют оптимальную стратегию в последовательности проведения опытов.

Другая классификация выделяет критерии, связанные с точностью оценки коэффициентов регрессии, и критерии, определяющие ошибку в оценке поверхности отклика. На сформулированных на математическом языке критериях оптимальности строится вся теория математического планирования многофакторного эксперимента.

Любые экспериментальные исследования содержат некоторую неопределенность (ошибку, погрешность), и экспериментатор должен стремиться не исключить ее, что невозможно, а минимизировать.

Однако следует отметить, что задача создания строгого формально-логического подхода к проблеме эксперимента на языке математики пока недостижима, так как любой эксперимент в значительной мере связан с эвристической деятельностью.

Рассмотрим критерии оптимальности факторных планов, позволяющие оценить коэффициенты регрессии. Для этого обратимся, например, к матрице планирования – условному обозначению сочетаний уровней переменных факторов, соответствующих условиям проведения отдельных экспериментов (рис. 6.1), и рассмотрим эти условия.

k N	Переменные факторы		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	–1	–1	–1
2	–1	–1	+1
3	–1	+1	–1
4	–1	+1	+1
5	+1	–1	–1
6	+1	–1	+1
7	+1	+1	–1
8	+1	+1	+1

Рис.6.1. Матрица планирования двухуровневого трехфакторного эксперимента

1. Условие ортогональности, обеспечивающее получение независимых оценок коэффициентов регрессии и их дисперсий.

1.1. Условие ортогональности к столбцу или условие симметричности гласит: “Алгебраическая сумма элементов любого столбца матрицы планирования равна нулю”, т.е. планы симметричны относительно центра эксперимента.

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0, \quad (6.1)$$

где  $j$  – номер фактора;  $i$  – номер опыта (серии опытов).

1.2. Условие парной ортогональности: “Сумма почленных произведений двух любых разных столбцов матрицы планирования равна нулю”.

$$\sum_{i=1}^N x_{ik} \cdot x_{ij} = 0, k \neq j. \quad (6.2)$$

Это свойство позволяет упрощать или усложнять модели, включая или добавляя коэффициенты без пересчета уже найденных параметров.

2. Условие нормировки: сумма квадратов элементов любого  $i$ -го столбца матрицы равна числу опытов (серий опытов) –  $N$ .

$$\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N. \quad (6.3)$$

В соответствии с этим положением коэффициенты уравнения регрессии определяются формулами:

$$b_j = N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N x_{ij} \cdot y_i, \quad (j = 1, 2, 3 \dots k), \quad (6.4)$$

а их дисперсия

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot n}, \quad (6.5)$$

где  $S_y^2$  – дисперсия воспроизводимости опытов;  $n$  – число параллельных опытов.

3. А – оптимальность (от английского термина average variance – средняя дисперсия) соответствует планам с минимальной средней дисперсией оценок коэффициентов регрессии.

4. D – оптимальность (по начальной букве английского слова determinant – определитель) обеспечивает минимум обобщенной дисперсии всех оценок коэффициентов регрессии.

5. Е – оптимальность (от английского eigen value – собственное значение) не допускает наличие слишком больших дисперсий у некоторых оценок коэффициентов регрессии.

Критериями оптимальности планов, связанных с ошибками в оценке поверхности отклика, будут следующие.

6. Насыщенность плана – приближение числа опытов к числу коэффициентов уравнения регрессии. Этот критерий вступает в противоречие с желанием экспериментатора максимально сократить число опытов.

7. Композиционность – возможность перехода от простых моделей к более сложным при сохранении результатов первоначальных шагов.

8. Ротатабельность (от английского rotatable – способный к вращению) – это наличие одинаковой дисперсии во всех направлениях факторного пространства на равных расстояниях от центра плана.

9. G – оптимальность (от английского general variance – общая дисперсия) минимизирует максимально возможную дисперсию предсказаний – дисперсию экстраполированных (продолженных за рамки эксперимента) значений выхода.

10. Q – оптимальность минимизирует среднюю дисперсию предсказаний.

11. Возможность преобразования независимых факторов (переменных) при сохранении оптимальности плана.

Следует отметить, что существует еще более 10 критериев оптимальности факторных планов, но они менее важны.

#### **6.1.4. Задачи, решаемые факторными планами**

Все экспериментальные задачи, решаемые с помощью оптимальных факторных планов, можно разделить на две группы:

- оптимизационные или экстремальные задачи,
- задачи описания или интерполяционные.

Оптимизационные задачи связаны с нахождением экстремума поверхности отклика, обеспечивающего оптимальное функционирование рассматриваемой системы.

Например, оптимизация состава сплава. Факторами являются процентное содержание легирующих компонентов, а выходом – наибольшая прочность сплава. Здесь величина экстремума выхода и оптимальные значения факторов заранее неизвестны. Для подобных задач характерны несколько случаев.

1. Имеется несколько экстремумов. Здесь среди частных экстремумов необходимо найти глобальный.

2. Оптимальная величина параметра оптимизации имеет нечисловое одностороннее логическое ограничение. Например, привес бройлеров или минимум себестоимости изделия. Понятно, что нельзя обеспечить привес бройлера больше, чем вес курицы, или свести себестоимость к нулю. Однако, строго говоря, в нашем случае ограничение отсутствует, так как оптимизируемые характеристики могут изменяться бесконечно, но при уменьшении величины этого изменения.

3. Оптимум выхода имеет конкретное одностороннее физическое ограничение. Например, выход годного на литье или расход моечного раствора. Известно, что выход годного не может превысить 100%, а минимальная норма моечного раствора должна обеспечивать смачивание всей очищаемой поверхности. Здесь оптимум асимптотически приближается к ограничению, но не должен когда-либо его превысить.

Наконец, оптимум может носить качественный характер одного из нескольких вариантов (технологических процессов, конструкций аппаратов, работы операторов).



Для каждого случая имеется некоторая оптимальная стратегия, но не всегда формализованная, а чаще всего основанная на опыте и интуиции экспериментатора.

Задачи описания носят интерполяционный характер. Формируется расчетная формула – модель для определения параметра выхода в любой точке исследованного диапазона факторов. Например, формула механической обработки, связывающая скорость резания  $V$  с глубиной  $t$ , подачей  $S$  и стойкостью инструмента  $T$ :

$$V = \frac{C_V}{t^{x_v} \cdot S^{y_v} \cdot T^m} \quad (6.6)$$

Иногда, если невозможно поставить эксперимент во всем рассматриваемом диапазоне факторного пространства, полученные модели используют для экстраполяции выхода, прогнозирования поведения системы. Оценка точности результатов осуществляется дисперсией предсказаний, а план эксперимента должен обладать ротатабельностью.

Наконец, для экстремальных зависимостей, когда известен оптимум выхода и его допустимые колебания, интерполяционная (линеаризованная или квадратичная) модель позволяет рассчитать допустимый разброс факторов, обеспечивающих колебание выхода в заданных пределах.

В зависимости от степени кривизны поверхности отклика она может быть описана линейной функцией относительно переменных и нелинейной, например, квадратичной. Выбор плана экспериментальных исследований при отсутствии априорной информации осуществляется на основе личного опыта исследователя.

Таким образом, экспериментатор обосновывает тип задачи, выбор оптимального плана, его реализацию и принятие соответствующих решений после анализа полученных результатов.

### 6.1.5. Критерий оптимизации

При постановке оптимизационных задач очень важно правильно определить параметр, который требуется оптимизировать. Эта часть исследований не поддается формализации и целиком зависит от опыта и интуиции исследователя.

Параметр оптимизации является реакцией (откликом) исследуемой системы на воздействие факторов. Поскольку реакция любого объекта исследований весьма многогранна, необходимо выбрать аспект реакции, представляющий наибольший интерес, то есть параметр оптимизации является количественной характеристикой цели исследований.

В качестве оптимизируемых характеристик в различных системах могут быть выбраны следующие параметры:

1. Технологические, связанные с процессом производства (жирность молока, твердость металла),

2. Конструктивные, определяющие конструкцию (зазор в подшипнике скольжения, толщина стен строения),

3. Материаловедческие, характеризующие свойства используемых материалов (прочность кирпича, негорючесть облицовки).

4. Эксплуатационные, служащие оценкой работы системы (ресурс двигателя, износостойкость подошвы).

5. Экономические (себестоимость, рентабельность).

Предпочтительно использовать количественные параметры, но могут быть выбраны и качественные:

- тип технологического процесса изготовления какой-либо детали;
- различные конструкции некоторого узла;
- марка или структура применяемого материала;
- ремонтпригодность или резервируемость;
- необходимость в капитальных затратах.

Для перевода качественных параметров в количественные может быть использован, например, ранговый подход или разбиение матрицы экспериментального плана на блоки.

Движение в факторном пространстве к оптимуму возможно, если выбран один единственный параметр оптимизации. При наличии нескольких параметров (например, точность, себестоимость, ресурс) все, кроме одного, выступают уже не параметрами оптимизации, а ограничениями (оптимум ресурса при установленной точности и себестоимости).

Основные требования к параметру оптимизации можно сформулировать в следующем виде:

- 1 – параметр оптимизации должен быть количественным;
- 2 – измеряемым;
- 3 – должен выражаться одним числом (например, соотношение компонентов  $A : B = 3 : 2$  выражается одним числом – 1,5);
- 4 – быть однозначным в статистическом смысле (заданному набору факторов соответствует одно значение выхода);
- 5 – эффективным в статистическом смысле, т.е. определяемым с наибольшей достижимой точностью;
- 6 – существующим для всех исследуемых состояний системы (область его определения может иметь ограничения);
- 7 – универсальным или обладать полнотой – способностью всесторонне характеризовать объект;
- 8 – с конкретным физическим смыслом (по возможности);
- 9 – простым и легко вычисляемым.

Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов экспериментов. Легко понять термины "наибольшая производительность" или "точность". Но когда для параметров выхода не выполняется требование статистической эффективности (например, однородность

дисперсий), прибегают к преобразованию выхода. Например:  $\ln y$  или  $\sin \sqrt{y}$  и становится неясным, что значит экстремум выхода.

Практически всегда результаты исследования сложных объектов могут быть представлены как задачи с несколькими выходными параметрами. В этом случае можно получить математические модели для каждого параметра выхода, но оптимизировать одновременно несколько функций невозможно.

Из положения можно выйти двумя способами: обосновать отказ от всех выходов, кроме одного, или ввести новый единый обобщенный критерий.

В первом случае можно выбрать одну наиболее важную функцию, исходя из опыта исследователя и целей эксперимента, или воспользоваться данными корреляционного анализа. При этом между всевозможными парами параметров вычисляется коэффициент парной корреляции – мера связи между двумя случайными величинами. Сильная корреляционная связь (более 0,8) при высокой достоверности (обычно 0,95 при числе степеней свободы  $f = N - 2$ ) позволяет исключить из рассмотрения любой из двух анализируемых параметров как не содержащий дополнительной информации об объекте исследований.

Гораздо перспективнее представляется второй путь – введение обобщенного параметра оптимизации. Для этого необходимо предварительно решить три вопроса:

- привести все параметры выхода к сравнимому безразмерному виду,
- ввести для всех параметров однотипную шкалу измерений,
- выбрать правило объединения нескольких частных откликов в единый обобщенный.

### **6.1.6. Переменные факторы**

Исследование любого объекта – это изучение его реакции на внешние воздействия или факторы. Следовательно, фактор представляет собой измеряемую переменную величину, принимающую в некоторый момент времени определенное дискретное значение.

Каждый фактор имеет область определения – совокупность множества значений, которые он может принимать.

Факторы могут быть количественными (величина погрешности, твердость материала и т.п.) и качественными (различные технологические процессы, разные операторы и т.п.). Качественные факторы могут быть переведены в количественные, например, ранжированием.

Факторы могут быть размерными (прочность, процентный состав) и безразмерными (ранг, относительная деформация); с дискретной областью определения (размеры) и непрерывной (время, температура). В последнем случае экспериментатор выбирает некоторое множество дискретных значений фактора, называемых уровнями.

Выбор уровней факторов и, в значительной степени, отбор значимых факторов из их общего количества является неформализованной эвристической задачей (несмотря на априорную информацию). Решение подобных задач целиком зависит от интуиции и опыта экспериментатора.

Факторы должны быть управляемыми, т.е. позволять исследователю устанавливать требуемое значение (уровень) фактора и поддерживать его постоянство в течение всего эксперимента.

Рассмотрим процесс измерения некоторой детали и влияние внешних факторов на его точность. Управляемыми факторами можно считать точность измерительных приборов, квалификацию (разряд) оператора, освещенность рабочего места и проч. К неуправляемым факторам можно отнести самочувствие оператора, температуру и влажность в цехе и т.п. Очевидно, что при планировании экспериментальных исследований возможен учет только управляемых факторов, а неуправляемые следует отнести к шумовому полю путем рандомизации опытов.

Все факторы должны быть однозначными, т.е. не являться функциями других факторов. В противном случае их трудно, а зачастую невозможно поддерживать на установленных уровнях. Примерами однозначных факторов являются температура, размер, давление; неоднозначных – погрешность, характер температурной функции в реакторе. В последнем случае можно добиться однозначности, используя при линейном росте температуры тангенс угла наклона прямой, а при нелинейном или смешанном законе – номер температурной кривой.

Все используемые в эксперименте факторы должны быть независимы, т.е. любой уровень каждого фактора может быть установлен независимо от величины уровней остальных факторов. Если это условие невыполнимо, то невозможно планировать эксперимент.

Например, в некоторой термодинамической системе при выполнении закона Менделеева–Клапейрона ( $p \cdot V = c \cdot T$ ) нельзя одновременно независимо установить давление  $P$ , объем  $V$  и температуру  $T$ , так как по любым двум факторам может быть вычислен третий. Поэтому в план эксперимента можно включить лишь два любых фактора:  $P$  и  $V$ ,  $P$  и  $T$ ,  $V$  и  $T$ . Иными словами, между выбранными и включенными в план эксперимента факторами не должно быть линейной корреляционной зависимости.

Выбранные факторы должны быть совместимы, т.е. все их комбинации являются осуществимыми и безопасными. Несовместимым будет попытка сплавить олово и графит. Несовместимо воздействие на глицерин смеси серной и азотной кислот, могущее привести к взрыву образовавшегося нитроглицерина. Иногда добиться совместимости факторов можно уменьшением диапазона их варьирования.

Наконец, следует иметь в виду, что точность фиксации уровней должна быть выше, чем точность измерения параметра оптимизации. В противном случае возникают затруднения (статистическая неоднородность, значительная погрешность выхода) в обработке результатов эксперимента.

Для успешного выбора основного (нулевого), а также наибольшего и наименьшего уровней факторов необходимо учитывать априорную информацию о точности фиксирования факторов, погрешность параметра оптимизации, интенсивность влияния того или иного фактора на выход.

При выборе диапазона варьирования отобранных факторов начинают с назначения основного уровня (центра экспериментального плана). При оптимизационных задачах в качестве него выбирают оптимум выходного параметра, а первоначальный интервал варьирования факторов выбирают небольшим. Это позволяет получать линейные модели и выработать стратегию пошагового движения к оптимуму.

При интерполяционном характере экспериментальных задач стараются как можно больше расширить диапазон варьирования. При этом, как правило, получаются нелинейные регрессионные модели.

В зависимости от соотношения интервал варьирования – область определения фактора различают узкий – 0,0, средний – 0,3 и широкий – более 0,3 интервалы.

Необходимое число уровней факторов выбирают в общем случае в зависимости от кривизны поверхности отклика в факторном пространстве. Необходимо помнить, что количество уровней фактора влияет на порядок полиномиальной модели, а количество опытов определяется формулой

$$N = M^k, \quad (6.20)$$

где  $M$  – число уровней каждого фактора;  $k$  – число переменных факторов в эксперименте.

Нулевой или средний уровень фактора может быть найден из выражения

$$x_{j_0} = \frac{x_{j_{\min}} + x_{j_{\max}}}{2}, \quad (6.21)$$

где  $x_{j_{\min}}$ ,  $x_{j_0}$ ,  $x_{j_{\max}}$  – соответственно наименьший, средний и наибольший уровни  $j$ -го фактора.

Величина интервала варьирования фактора рассчитывается по формуле

$$\Delta x_j = \frac{x_{j_{\max}} - x_{j_{\min}}}{2}. \quad (6.22)$$

Следует отметить, что интервал варьирования не должен быть меньше погрешности, с которой фиксируется уровень фактора.

С целью облегчения и упрощения расчетов при обработке экспериментальных результатов, а также для возможности использования стандартных планов экспериментов факторы кодируются. При этом все вычисления производятся в безразмерной системе координат – кодированной системе. Наибольшему уровню фактора присваивается обозначение “+1”, наименьшему “-1”, а среднему “0”.

Кодирование – это линейное преобразование натуральных (размерных) уровней факторов в кодовые безразмерные величины. Переход от натуральных  $x_j$  к кодированным  $X_j$  переменным осуществляется по формуле

$$X_j = \frac{x_j - x_{j0}}{\Delta x_j} = \frac{2 \cdot (x_j - x_{j_{\max}})}{x_{j_{\max}} - x_{j_{\min}}} + 1. \quad (6.23)$$

Кодированное пространство (при числе факторов-осей более трех – гиперпространство), на осях которого откладываются значения варьируемых факторов, называется факторным.

Таким образом, при решении оптимизационных задач мы находим экстремум параметра оптимизации, а при решении интерполяционных задач – описываем процесс его изменения в факторном пространстве.

### 6.1.7. Планы полнофакторных экспериментов

В настоящее время отсутствует единая всеобъемлющая теория эксперимента. Выбор того или иного оптимального плана основывается в значительной степени на опыте исследователя и логике исследований. Математическая теория эксперимента не дает однозначно оптимальных решений.

В зависимости от задач исследований свойств объекта, выполнения математических ограничений и т.п. можно выбрать тот или иной класс планов – стратегию научного поиска.

Одна из классификаций планов выглядит следующим образом:

- планы дисперсионного анализа;
- планы отсеивающего эксперимента;
- планы многофакторного анализа;
- планы для изучения поверхности отклика;
- планы для динамических задач;
- планы для изучения механизма явлений;
- планы для построения диаграмм состав – свойство.

По методу анализа и виду математической модели все планы можно разбить на три группы: планы дисперсионного, регрессионного и ковариационного анализа.

По числу уровней переменных факторов планы бывают  $2^x$ -,  $3^x$ - и более уровневые. Кроме того, различают планы первого порядка для построения линейных моделей, второго – для квадратичных моделей и планы высших порядков. В настоящее время наиболее освоены и распространены симметричные двухуровневые планы типа  $2^k$ , где  $k$  – число факторов. Эти планы имеют одновременно все критерии оптимальности.

Планы изображаются в виде матриц планирования – таблиц, где наибольшее значение фактора обозначено “+”, а наименьшее “–” (рис.6.5).

Каждый столбец в матрице планирования называется вектор-столбцом, а строка – вектор-строкой.

Логика построения матриц планирования двухуровневых полнофакторных экспериментов очевидна: необходимо повторить предыдущий план на наименьшем и наибольшем уровнях добавляемого исследуемого фактора.

Тип плана	Номер опыта	Факторы			
		X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>
<div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;">2<sup>2</sup></div> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;">2<sup>3</sup></div> <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;">2<sup>4</sup></div> </div>	1	–	–	–	–
	2	+	–	–	–
	3	–	+	–	–
	4	+	+	–	–
	5	–	–	+	–
	6	+	–	+	–
	7	–	+	+	–
	8	+	+	+	–
	9	–	–	–	+
	10	+	–	–	+
	11	–	+	–	+
	12	+	+	–	+
	13	–	–	+	+
	14	+	–	+	+
	15	–	+	+	+
	16	+	+	+	+

Рис. 6.5. Матрицы полного факторного двухуровневого эксперимента (2-4 фактора)

### 6.1.8. Выбор модели и ее исследование

При планировании и реализации экспериментов вид поверхности отклика и описывающей ее функции, как правило, неизвестен. Поэтому реальная функция отклика аппроксимируется алгебраическим полиномом, полученным при разложении неизвестной функции отклика в ряд Тейлора в окрестности любой точки из области определения этой функции в факторном пространстве. Тогда:

$$y = f(x_j) \cong b_0 + \sum_{j=1}^k b_j \cdot x_j + \sum_{j=1}^k b_{jl} \cdot x_j \cdot x_l, \quad j \neq l, \quad (6.24)$$

где  $b$  – коэффициенты;  $x$  – факторы.

По результатам экспериментальных исследований коэффициенты регрессионной модели определяются методом наименьших квадратов – регрессионным анализом. Модель всегда линейна относительно коэффициентов (не переменных факторов).

При однофакторных экспериментах модель может быть интерпретирована геометрически в виде кривой на плоскости; при двух факторах – это поверхность в пространстве; при трех и более факторах модель может быть представлена только отдельными ее сечениями.

Оценка коэффициентов модели должна быть состоятельной, несмещенной, эффективной и достаточной. Рассмотрим это подробнее.

Оценка состоятельна, если при увеличении объема выборки она приближается к истинной величине; не смещена, если ее математическое ожидание равно оцениваемому коэффициенту; эффективна, т.е. имеет минимальную дисперсию, и достаточна, если включает максимум информации о коэффициенте.

При постановке оптимизационных задач для движения по поверхности отклика к экстремуму необходимое направление может быть выбрано по ли-

нейной модели. В этом случае экстремум достигается пошаговым приближением экспериментов к зоне оптимума.

Если зона экстремума априорно известна, и необходимо выяснить, например, допустимый разброс переменных факторов, то используют метод перевала. При этом всю зону факторного пространства дробят на два блока: до и после экстремума. В каждом блоке ставят отдельный факторный эксперимент и получают две линейные модели.

Надежное предсказание поведения исследуемого объекта при помощи модели возможно только при ее адекватности. Модель адекватна, если ее погрешность не превышает погрешности экспериментов, на основании которых она получена.

Следует отметить, что интерполяционные модели удобнее выражать через натуральные значения факторов, а оптимизационные – через кодовые. Исследование полученных моделей также удобнее выполнять в кодовых переменных.

Рассмотрим процедуру канонического анализа математической модели в виде полинома второго порядка. Задача сводится к преобразованию квадратичного полинома к выражению канонического вида

$$y - y_S = \sum_{j=1}^k A_{ij} \cdot Z_j^2, \quad (6.25)$$

где  $y$  – текущее значение параметра оптимизации;  $y_S$  – значение в новых координатах;  $A_{ij}$  – коэффициенты уравнения регрессии канонического вида при квадратичных членах;  $Z_j$  – новые оси координат (смещенные в новый центр и повернутые относительно старых осей).

Геометрическая интерпретация канонического преобразования уравнения поверхности отклика представлена на рис. 6.6.

Следует отметить, что при числе факторов  $k \geq 3$  канонические преобразования усложняются, и в этих случаях целесообразно использовать методы матричной алгебры.

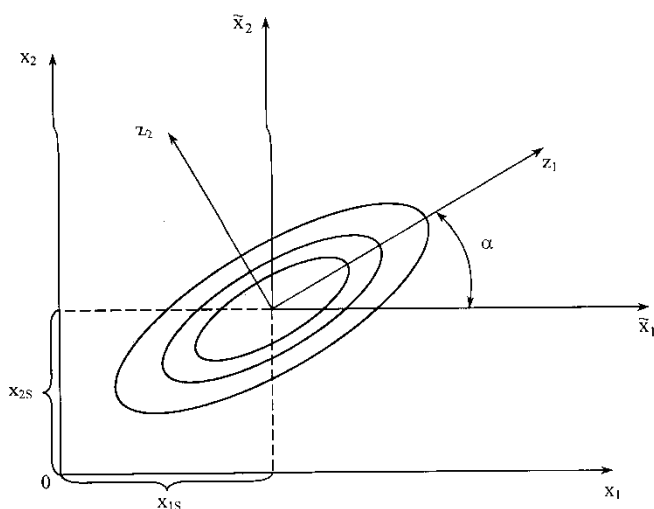


Рис. 6.6. Схема канонических преобразований



### 6.1.9. Поиск оптимума

Исследователями Кифером и Вольфовичем (США) был предложен градиентный метод оптимизации, предназначенный для шагового движения к экстремуму поверхности отклика в задачах оптимизации.

Градиент функции представляет собой вектор, показывающий наискорейшее изменение функции, величина и направление которого определяются по формуле

$$\overrightarrow{\text{grad}} y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \vec{j} + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_k} \vec{k}, \quad (6.35)$$

где  $y$  – выход эксперимента;  $x_k$  – переменные факторы;  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы по соответствующим координатам.

Наиболее просто значение производной может быть оценено как отношение приращения функции к приращению отдельных факторов при реализации двух экспериментов, поставленных в окрестностях исходной точки факторного пространства: пробного и рабочего опытов, например, в направлении фактора  $x_1$ . Тогда

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} \cong \frac{\Delta y}{\Delta x_1}.$$

Ставя последовательно несколько опытов вокруг пробной точки, определяют составляющие градиента по осям факторного пространства, т.е. направление движения к оптимуму. Кроме того, задаются величиной рабочего шага при этом движении.

$$\vec{x}_{h+1} = \vec{x}_h + P_h \cdot \left( \frac{\Delta y}{\Delta x_1} + \frac{\Delta y}{\Delta x_2} + \dots + \frac{\Delta y}{\Delta x_h} \right), \quad (6.36)$$

где  $P$  – параметр рабочего шага;  $h$  – номер шага.

Геометрическая интерпретация движения к оптимуму методом градиента представлена на рис. 6.7.

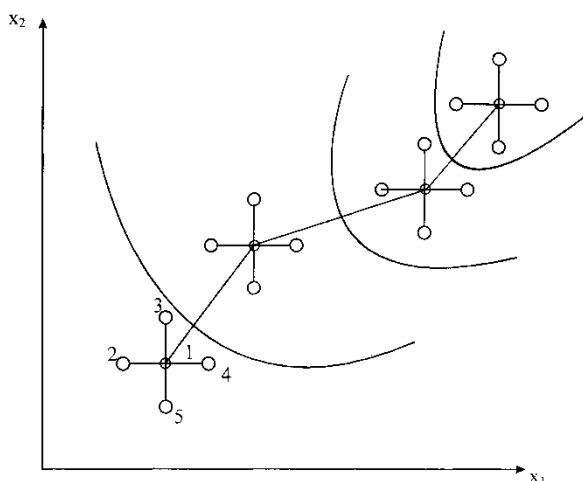


Рис.6.7. Схема движения к оптимуму методом градиента

(цифры на точках номера опытов)

Из целого ряда градиентных методов наиболее широкое применение получил метод “крутого восхождения”, предложенный Боксом и Уилсоном в 1951 году. Этот метод определяет стратегию последовательного пошагового

проведения экспериментов, при котором весь цикл исследований разбивается на отдельные этапы. Причем на каждом последующем этапе используются результаты предыдущего.

Согласно теореме Тейлора о разложении аналитической функции в ряд, частные производные функции по факторам равны по величине и знаку соответствующим коэффициентам линейного уравнения регрессии.

Следовательно,

$$\overrightarrow{\text{grad}} y = b_1 \cdot \vec{i} + b_2 \cdot \vec{j} + \dots + b_k \cdot \vec{k} \quad (6.37)$$

и

$$b_i = \frac{\partial y}{\partial x_i}. \quad (6.38)$$

Рассмотрим формализованную процедуру крутого восхождения с численным примером.

В начале необходимо иметь линейную модель, построенную по результатам эксперимента, и знать интервалы варьирования и нулевой уровень факторов.

Дано: адекватная линейная модель в кодовых переменных:

$$h = 41 + 10x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 4x_4.$$

Известно, что  $x_4$  является качественным фактором (например, конструкцией узла) и наилучшие результаты дает конструкция с кодовым значением “–1”. При крутом восхождении это значение качественного фактора фиксируется и модель приобретает вид

$$h = 45 + 10x_1 + 6x_2 - 3x_3.$$

Если оба уровня качественного фактора дают близкие результаты, то крутое восхождение повторяется на двух уровнях. Интервалы варьирования факторов в натуральных переменных:

$$\Delta x_1 = \pm 0,15; \Delta x_2 = \pm 100; \Delta x_3 = \pm 50;$$

нулевой уровень факторов:

$$x_{0,1} = 0,4; x_{0,2} = 840; x_{0,3} = 60.$$

1. Выбор базового фактора.

В качестве базового рекомендуется выбирать фактор с наибольшей абсолютной величиной коэффициента линейной модели или фактор с наибольшим интервалом варьирования.

*Пример.*

Выбираем в качестве базового фактор  $x_2$ , так как

$$|b_1| > |b_2| > |b_3| \text{ и } \Delta x_2 > \Delta x_3 > \Delta x_1.$$

2. Выбор шага базисного фактора.

Величины шагов движения по факторным осям должны быть больше ошибки, с которой фиксируется фактор. Малый шаг увеличивает количество опытов, а слишком большой – может привести к проскоку экстремума.

Обычно шаг  $P_j$  выбирают в долях  $\mu$  интервала варьирования фактора:

$$P_j = \mu \cdot \Delta x_j, \quad (6.39)$$

где  $0 < \mu < 1$ .

*Пример.*

$$P_6 = P_2 = 0,2 \cdot 100 = 20.$$

3. Расчет шагов для остальных факторов выполняем по формуле

$$P_j = P_6 \frac{b_j \cdot \Delta x_j}{b_6 \cdot \Delta x_6}, \quad (6.40)$$

где индекс “6” относится к базовому фактору.

*Пример.*

$$P_1 = 20 \frac{10 \cdot 0,15}{6 \cdot 100} = 0,05; \quad P_3 = 20 \frac{(-3) \cdot 50}{6 \cdot 100} = -5.$$

При необходимости шаги можно для удобства счета округлять.

4. Выбор начала движения по градиенту.

За начало движения по градиенту функции отклика можно брать любую точку поверхности отклика. Обычно используют центр эксперимента (основной или нулевой уровень каждого фактора). Но если есть предположение о наличии экстремума в некоторой точке, то эту точку нужно брать в вилку.

*Пример:* в качестве начала движения выбираем основной уровень.

5. Расчет величин факторов для первого шага:

$$x_j = x_{j0} + n \cdot P_j, \quad (6.41)$$

где  $n$  – порядковый номер шага.

*Пример.*

$$x_1 = 0,4 + 1 \cdot 0,05 = 0,45; \quad x_2 = 840 + 1 \cdot 20 = 860; \quad x_3 = 60 + 1 \cdot (-5) = 55.$$

6. Перевод натуральных значений факторов для первого шага движения в кодовые.

$$X_j = \frac{\bar{x}_j - x_{j0}}{\Delta x_j}, \quad (6.42)$$

где  $\bar{x}_i$  – натуральное значение фактора.

*Пример.*

$$X_1 = \frac{0,45 - 0,4}{0,15} = 0,33; \quad X_2 = \frac{860 - 840}{100} = 0,2; \quad X_3 = \frac{55 - 60}{50} = -0,1.$$

7. Расчет выхода в первом мысленном опыте.

*Пример.*

$$y_9 = 45 + 10 \cdot 0,33 + 6 \cdot 0,2 - 3 \cdot (-0,1) = 49,2$$

8. Повторить этапы 5, 6, 7. Результаты сведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Реализация реальных и мысленных экспериментов

Номер опыта	Факторы						Выход	Примечание
	натуральные			кодовые				
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$X_1$	$X_2$	$X_3$		
1	0,55	940	110	+1	+1	+1	58	ДФЭ $2^{4-1}$ для построения линейной модели
2	0,25	940	110	−1	+1	+1	38	
3	0,55	740	110	+1	−1	+1	46	
4	0,25	740	110	−1	−1	+1	26	
5	0,55	940	10	+1	+1	−1	64	
6	0,25	940	10	−1	+1	−1	46	
7	0,55	740	10	+1	−1	−1	52	
8	0,25	740	10	−1	−1	−1	32	

9	0,45	860	55	0,33	0,2	-0,1	49,2	Мысленные опыты
10	0,50	880	50	0,67	0,4	-0,2	53,5	
11	0,55	900	45	1	0,6	-0,3	62,71	Реальный опыт
12	0,60	920	40	1,33	0,8	-0,4	64,3	Мысленные опыты
13	0,65	940	35	1,67	1	-0,5	69,2	
14	0,70	960	30	2	1,2	-0,6	75,17	Реальные опыты
15	0,75	980	25	2,33	1,4	-0,7	69,21	

После каждого одного-трех мысленных опытов следует ставить один реальный с тем же шагом для проверки. Обнаружив оптимум, необходимо поставить один или два (с двух сторон от экстремума) реальных опыта для подтверждения наличия оптимума. В процессе движения по градиенту экстремум может быть как внутри интервалов варьирования факторов, так и вне их, т.е. допускается некоторая экстраполяция экспериментальной области.

Если один из факторов при движении по градиенту достиг своих физических пределов и дальше изменяться не может, то необходимо, фиксируя его на этом предельном уровне, двигаться, меняя оставшиеся факторы.

Крутое восхождение прекращают, если найден оптимум или если ограничения по факторам делают движение по градиенту нефизическим (нереальным).

Следует иметь в виду, что, сокращая общее число опытов для достижения экстремума, метод крутого восхождения не позволяет обнаружить экстремум одними мысленными опытами (уравнение регрессии линейно); он указывает лишь на кратчайший путь к оптимуму.

#### 6.1.10. Методика полнофакторного двухуровневого эксперимента

Рассмотрим формализованные этапы реализации полнофакторного эксперимента в рамках интерполяционной задачи.

##### 1. Постановка задачи исследований.

*Пример:* получение математической модели работы торцевых уплотнений из силицированного графита.

##### 2. Выбор параметра выхода.

*Пример:* величина утечек – Q, л/час.

##### 3. Выбор переменных факторов.

*Пример:* 1) эксплуатационный параметр PV, МПа·м/с; 2) число циклов нагружения K, шт.

$$K = k + m,$$

где k – число пусков и остановок, m – число сбросов и подъемов давления за сутки работы;

##### 3) динамический параметр D, безразмерный,

$$D = \frac{p}{\bar{p}},$$

где p – давление в сети после сброса или подъема давления, МПа;

$\bar{p}$  –

среднее рабочее давление, МПа.

##### 4. Определение возможной точности определения факторов:

*Пример.*

- 1) PV – 5%;
- 2) K – 1 шт.;
- 3) D – 10%.

5. Установление интервалов варьирования факторов.

*Пример.* Выбираем диапазон варьирования факторов, их минимальное и максимальное значение:

- 1) 24...50 МПа·м/с;
- 2) 19..30 шт.;
- 3) 0,7...2.

Рассчитываем величину интервала варьирования по формуле

$$\Delta A = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{2}; \quad (6.43)$$

$$1) \Delta PV = \frac{50 - 24}{2} = 13; \quad 2) \Delta K = \frac{30 - 10}{2} = 10;$$

$$3) \Delta D = \frac{2 - 0,7}{2} = 0,65.$$

6. Определение центра плана. Нулевой уровень факторов определяется по формуле

$$A_0 = \frac{A_{\min} + A_{\max}}{2}. \quad (6.44)$$

*Пример:*

$$1) PV_{0,1} = \frac{24 + 50}{2} = 37; \quad 2) K_{0,2} = \frac{10 + 30}{2} = 20;$$

$$3) D_{0,3} = \frac{0,7 + 2}{2} = 1,35.$$

В итоге получаем данные, которые сведены в табл.6.2.

Таблица 6.2

Исходные данные в натуральных переменных

№ п/ п	Факторы			Ниж ний уро- вень	Вер хний уро- вень	Ну- ле- вой уро- вень	Ин- тер- вал варь- иро- вания
	Наиме- нование	Обо- зна- чение	Раз- мер- ность				
1	Эксплуа- тацион- ный па- раметр	PV	МПа· м/с	24	50	37	13
2	Число циклов нагруже-	K	шт	10	30	20	10

	ния						
3	Динамический параметр	D	–	0,7	2	1,35	0,65

## 7. Разработка плана эксперимента.

*Пример.* Стандартная матрица планирования двухуровневого трехфакторного эксперимента (ПФЭ  $2^3$ ) приведена в табл.6.3.

Таблица 6.3

План ПФЭ  $2^3$

№ п/ п	Факторы			Порядок реализации опытов
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
1	–	–	–	5
2	+	–	–	8
3	–	+	–	3
4	+	+	–	7
5	–	–	+	1
6	+	–	+	4
7	–	+	+	6
8	+	+	+	2

В последнем столбце табл. 6.3 указан порядок (на основе таблицы случайных чисел) выполнения отдельных опытов при их рандомизации по времени.

## 8. Реализация экспериментов.

*Пример:* результаты экспериментов при выполнении трех параллельных (трех повторных) опытов в виде значений выходного параметра сведены в табл. 6.4 (столбцы 2...4).

## 9. Расчет среднего выхода по формуле

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n y_{i,u} \quad (6.45)$$

*Пример:* столбец 5 табл. 6.4.

Таблица 6.4

Результаты эксперимента

№ п/ п	Выход			Средний выход	Расчет			
	$y_{i1}$	$y_{i2}$	$y_{i3}$		$(y_{i1} - \bar{y}_i)^2$	$(y_{i2} - \bar{y}_i)^2$	$(y_{i3} - \bar{y}_i)^2$	$\sum_{u=1}^3 (y_{iu} - \bar{y}_i)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9

1	5,1	5	4, 6	4,9	0,04	0,01	0,09	0,14
2	5	5, 7	5, 8	5,5	0,25	0,04	0,09	0,38
3	6,1	7, 1	6, 3	6,5	0,16	0,36	0,04	0,56
4	6,8	8	6, 5	7,1	0,09	0,81	0,36	1,26
5	5,7	6, 2	6, 1	6,0	0,09	0,04	0,01	0,14
6	5,8	6, 2	7, 8	6,6	0,64	0,16	1,44	2,24 max
7	7,3	7, 6	8, 5	7,8	0,25	0,04	0,49	0,78
8	8,1	8, 9	8, 8	8,6	0,25	0,09	0,04	0,38
$\sum_{i=1}^N$								5,88

#### 10. Оценка однородности результатов экспериментов.

Однородность дисперсий результатов оценивается по критерию Кохрена:

$$G_p = \frac{\left| \sum_{u=1}^n (y_{iu} - \bar{y}_i)^2 \right|_{\max}}{\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^n (y_{iu} - \bar{y}_i)^2} \leq G_T, \quad (6.46)$$

где  $i$  – номера серий опытов (от 1 до  $N$ );  $u$  – количество параллельных опытов в серии (от 1 до  $n$ );  $G_p$  и  $G_T$  – расчетный и табличный критерии Кохрена для 5%-ной значимости при  $N$  сравниваемых и  $n$  параллельных опытах.

При удовлетворении неравенства (6.46) считаем результаты однородными, т.е. соответствующими нормальному распределению. При отсутствии параллельных опытов оценка однородности дисперсий не производится.

Если построчные дисперсии при неодинаковом числе параллельных опытов отличаются на порядок и более, то необходимо проверить их однородность по критерию Бартлетта. Для этого находится величина  $\chi^2$  для числа степеней свободы  $f = N - 1$  и должно выполняться неравенство

$$\chi_p^2 = \frac{1}{c} \cdot \left( f \cdot \lg S_y^2 - \sum_{i=1}^N f_i \cdot \lg S_i^2 \right) < \chi_T^2, \quad (6.47)$$

$$\text{где } c = 0,4343 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3 \cdot (N-1)} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f} \right); \quad (6.48)$$

$f_i = n_i - 1$  – степени свободы построчных дисперсий;

$S_i^2$  – построчная дисперсия.

*Пример:* расчет критерия Кохрена приведен в табл. 6.4 (столбцы 6-9).

$$G_p = \frac{2,24}{5,88} = 0,38 < G_T = 0,61 .$$

Вывод: дисперсии однородны.

11. Определение дисперсии воспроизводимости.

Дисперсия воспроизводимости в натуральных переменных определяется по формуле

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^n (y_{iu} - \bar{y}_i)^2}{N \cdot (n-1)} . \quad (6.49)$$

При отсутствии параллельных опытов ( $n=1$ ) в сериях плана необходимо поставить дополнительно опыт в центре плана (при нулевых уровнях факторов) с числом параллельных опытов не меньше четырех. Тогда дисперсия воспроизводимости рассчитывается по формуле

$$S_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (y_u - \bar{y})^2}{n-1} . \quad (6.50)$$

При различном количестве параллельных опытов ( $n - \text{var}$ ) для серий матрицы планирования  $N$  дисперсия воспроизводимости определяется по формуле средневзвешенной дисперсии

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N S_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^N f_i} , \quad (6.51)$$

где  $f_i = n_i - 1$  – число степеней свободы.

*Пример.* По данным табл. 6.4, имеем:

$$S_y^2 = \frac{5,88}{8 \cdot (3-1)} = 0,367 .$$

12. Расчет коэффициентов уравнения регрессии.

Для ПФЭ  $2^3$  уравнение регрессии имеет вид:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 ,$$

$$\text{где } b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}}{N} ; \quad b_j = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \bar{y}_i \cdot x_{ji} ; \quad b_{ju} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \bar{y}_i \cdot x_{ji} \cdot x_{ui} .$$

*Пример.* Для удобства расчет сведен в табл. 6.5.

Таблица 6.5

Расчет коэффициентов уравнения регрессии

№ П/ П	План			Вы- ход $\bar{y}$	$\bar{y} \cdot x_1$	$\bar{y} \cdot x_2$	$\bar{y} \cdot x_3$	$\bar{y} \cdot x_1 \cdot x_2$	$\bar{y} \cdot x_2 \cdot x_3$	$\bar{y} \cdot x_1 \cdot x_3$
	x 1	x 2	x 3							
1	–	–	–	4,9	– 4,9	–4,9	– 4,9	+4,9	+4,9	+4,9
2	+	–	–	5,5	+5, 5	–5,5	– 5,5	–5,5	+5,5	–5,5



3	–	+	–	6,5	$\frac{-}{6,5}$	+6,5	$\frac{-}{6,5}$	–6,5	–6,5	+6,5
4	+	+	–	7,1	$\frac{+7,1}{1}$	+7,1	$\frac{-}{7,1}$	+7,1	–7,1	–7,1
5	–	–	+	6,0	$\frac{-}{6,0}$	–6,0	$\frac{+6,0}{0}$	+6,0	–6,0	–6,0
6	+	–	+	6,6	$\frac{+6,6}{6}$	–6,6	$\frac{+6,6}{6}$	–6,6	–6,6	+6,6
7	–	+	+	7,8	$\frac{-}{7,8}$	+7,8	$\frac{+7,8}{8}$	–7,8	+7,8	–7,8
8	+	+	+	8,6	$\frac{+8,6}{6}$	+8,6	$\frac{+8,6}{6}$	+8,6	+8,6	+8,6
	$\Sigma$			53	2,6	7	5	0,2	0,6	0,2

$$b_0 = \frac{53}{8} = 6,625 ; \quad b_1 = \frac{2,6}{8} = 0,325 ; \quad b_2 = \frac{7}{8} = 0,875 ; \quad b_3 = \frac{5}{8} = 0,625 ; \quad b_{12} = \frac{0,2}{8} = 0,025 ;$$

$$b_{23} = \frac{0,6}{8} = 0,075 ; \quad b_{13} = 0,025.$$

Коэффициент  $b_{1,2,3}$  считается незначимым.

13. Расчет дисперсии коэффициентов уравнения регрессии.

Расчет производим по формуле

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot n}. \quad (6.52)$$

*Пример.*

$$S_b^2 = \frac{0,367}{8 \cdot 3} = 0,0153.$$

14. Определение значимости коэффициентов уравнения регрессии.

Значимость коэффициентов уравнения регрессии оценивается сравнением их абсолютного значения с доверительным интервалом:

$$\Delta b = t_\alpha \cdot \sqrt{S_b^2} < |b_i|, \quad (6.53)$$

где  $t_\alpha$  – критерий Стьюдента при 5%-ной значимости для числа степеней свободы  $f = N \cdot (n - 1)$ .

*Пример.*

$$\Delta b = 2,12 \cdot \sqrt{0,0153} = 0,26.$$

Вывод: незначимы коэффициенты смешанных взаимодействий  $b_{12}$ ,  $b_{23}$ ,  $b_{13}$ .

15. Запись уравнения регрессии.

*Пример.*

$$y = 6,625 + 0,325 \cdot x_1 + 0,875 \cdot x_2 + 0,625 \cdot x_3.$$

16. Переход к натуральным переменным.

Он осуществляется по формуле:

$$x_j = \frac{2 \cdot (A_j - A_{j\max})}{A_{j\max} - A_{j\min}} + 1, \quad (6.54)$$

где  $A_j$  – переменный фактор, соответствующий кодовому значению  $x_j$ .

*Пример.*

$$x_1 = \frac{2 \cdot (PV - 50)}{50 - 24} + 1 = 0,077 \cdot PV - 2,85$$

$$x_2 = \frac{2 \cdot (K - 30)}{30 - 10} + 1 = 0,1 \cdot K - 2$$

$$x_3 = \frac{2 \cdot (D - 2)}{2 - 0,7} + 1 = 1,54 \cdot D - 2,08$$

17. Запись модели в натуральных переменных.

*Пример.*

$$y = 6,625 + 0,325 \cdot (0,077 \cdot PV - 2,85) + 0,875 \cdot (0,1 \cdot K - 2) + 0,625 \cdot (1,54 \cdot D - 2,08).$$

Упростив, получим окончательно:

$$y = 2,65 + 0,025 \cdot PV + 0,087 \cdot K + 0,96 \cdot D.$$

18. Расчет дисперсии адекватности.

Дисперсия адекватности определяется по формуле

$$S_{ад}^2 = \frac{n \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - y_{расч_i})^2}{N - k}, \quad (6.55)$$

где  $y_{расч}$  – расчетное (по модели) значение выходного параметра;  
 $k$  – число коэффициентов в модели.

Для удобства расчет сведен в табл.6.6.

*Пример.*

Таблица 6.6

Расчет дисперсии адекватности

№ П/ П	$\bar{y}_i$	$y_{расч}$	$(\bar{y}_i - y_{расч_i})^2$	$\delta = \frac{\bar{y}_i - y_{расч_i}}{\bar{y}_i} \cdot 100 \%$
1	4,9	4,79	0,012	2,24
2	5,5	5,44	0,003	1,09
3	6,5	6,53	0,001	0,50
4	7,1	7,18	0,007	1,13
5	6,0	6,04	0,002	0,67
6	6,6	6,69	0,008	1,36
7	7,8	7,78	0,006	1,02
8	8,6	8,43	0,029	1,98
		$\Sigma$	0,068	

$$S_{ад}^2 = \frac{3 \cdot 0,068}{8 - 4} = 0,201.$$

19. Проверка адекватности модели.

Адекватность модели оценивается по критерию Фишера, который должен быть меньше табличного.

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2} < F_T, \quad (6.56)$$

где  $F_p$ ,  $F_T$  – расчетный и табличный критерии Фишера для 5%-ной значимости при числе степеней свободы для дисперсии адекватности  $f = N - k$ . Для дисперсии воспроизводимости число степеней свободы равно  $f_y = N \cdot (n - 1)$ .

*Пример.*

$$F_p = \frac{0,201}{0,367} = 0,55 < F_T = 5,8 .$$

Вывод: линейная модель адекватна. Тот же вывод можно было сделать исходя из условия  $S_{ад}^2 < S_y^2$ .

## 20. Расчет относительной погрешности модели.

Погрешность определяется для исследованных точек факторного пространства по формуле

$$\delta = \frac{|y_{pi} - \bar{y}_i|}{\bar{y}_i} \cdot 100 \text{ \%}.$$

Для удобства расчеты сведены в таблицу (см.табл.6.6).

*Пример.* Результаты расчета приведены в последнем столбце табл. 6.6.

21. Выводы по результатам экспериментальных исследований и анализу полученной модели должны включать данные:

- об адекватности полученной модели;
- о вкладе отдельных факторов в выход (по величине коэффициентов);
- о наличии или отсутствии экстремума в экспериментальной зоне;
- о погрешности интерполяции по модели;
- о влиянии неучтенных факторов (по величине коэффициента  $b_0$ );
- о стратегии дальнейших исследований.

## 6.2. Развитие многофакторных планов и методика их реализации

Наряду с несомненными достоинствами полный факторный эксперимент имеет целый ряд недостатков, существенным образом сокращающих возможную область его применения. Так, количество опытов в полнофакторных планах значительно превосходит число определяемых коэффициентов линейного уравнения регрессии. Кроме того, с ростом количества исследуемых факторов очень быстро растет общее число экспериментов, и реализация полнофакторных планов становится нереальной.

Из полного факторного эксперимента нельзя извлечь информацию о квадратичных членах, т.е. описание экстремальной зоны поверхности отклика невозможно.

Совершенствованию методик применения факторных планов посвящен данный раздел.

### 6.2.1. Дробный факторный эксперимент

Итак, для полнофакторного эксперимента число серий опытов  $N = 2^k$  растет гораздо быстрее количества исследуемых факторов  $k$  и превышает число линейных коэффициентов регрессии. Возможно сокращение общего

числа опытов за счет этой избыточной информации. При этом необходимо сохранить оптимальность плана (ортогональность, ротатабельность и т.д.).

Сущность дробного факторного эксперимента (ДФЭ) состоит в замене вектора–столбца матрицы планирования, относящегося к смешанному взаимодействию, на новый дополнительный фактор, значения которого определяются знаками этого столбца. Правомочность такой замены основывается на предположении о незначимости коэффициентов смешанных взаимодействий, так как строится только линейная модель.

Таким образом, при числе опытов соответствующих двухфакторному плану ( $N = 2^2 = 4$ ), можно оперировать тремя факторами. При этом будем иметь половину или полуреплику от полнофакторного плана ПФЭ  $2^3 = 8$  в виде дробного факторного ДФЭ  $2^{3-1} = 4$  (рис.6.8) и сократим число опытов в два раза.

Дробной репликой называется план эксперимента, являющийся частью плана полнофакторного эксперимента.

Матрица ДФЭ сохраняет все свойства матрицы ПФЭ и позволяет оценить коэффициенты при линейном и свободном члене.

Поскольку целесообразно наибольшее сокращение количества опытов, то для четырех факторов используют полуреплику полнофакторного плана  $2^{4-1}$ , дающую 8 опытов, а не 16; для 5 – четверть реплику  $2^{5-2}$ , дающую 8, а не 32 опыта; для 6 -  $1/8$  реплику  $2^{6-3}$ , дающую 8, а не 64 опыта и т.д.

№ n/n	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub> x <sub>3</sub>	x <sub>1</sub> x <sub>3</sub>
1	–	–	+	–	–
2	+	–	–	+	–
3	–	+	–	–	+
4	+	+	+	+	+

а)
б)

Рис. 6.8. Дробный факторный эксперимент:

а – матрица ДФЭ  $2^{3-1}$ ; б – совпадающие вектор-столбцы

В общем случае для ДФЭ  $2^{k-p}$  имеем “k” факторов и ”k–p” опытов.

Предельное количество исследуемых факторов не должно быть меньше числа коэффициентов линейной регрессионной модели. То есть для 4-х опытов (ДФЭ  $2^{3-1}$ ) – это 3, для 8 (ДФЭ  $2^{7-4}$ ) – 7, для 16 – 15 и т.д.

При выборе дробной реплики учитывается насыщенность плана, т.е. соотношение числа коэффициентов регрессии и количества опытов. Если эффекты взаимодействия реплики замещены новыми дополнительными факторами, то она называется насыщенной. При этом число факторов равно числу коэффициентов модели, и ее адекватность проверить нельзя, так как число степеней свободы равно нулю. Однако число опытов при этом минимально.

Следовательно, при выборе дробной реплики необходимо:

- определить число коэффициентов в уравнении регрессии, равное числу факторов ( $k + 1$ );

- выбрать план полнофакторного эксперимента, содержащий наименьшее число опытов  $N \geq (k + 1)$ , и принять его за основу при составлении плана ДФЭ.

Следует отметить, что с увеличением количества факторов минимизация числа опытов путем использования дробных реплик превращается в весьма сложную задачу.

При построении плана ДФЭ оценки коэффициентов регрессии будут смешанными. Так, для ДФЭ  $2^{3-1}$  (см. рис. 6.8, а) найденные коэффициенты будут оценками совместных эффектов: для  $b_1$  – это  $\beta_1 + \beta_{2,3}$ ,  $b_2$  –  $\beta_2 + \beta_{1,3}$ , для  $b_3$  –  $\beta_3 + \beta_{1,2}$ .

И только при незначимости смешанных взаимодействий ( $b_1 \approx \beta_1$ ,  $b_2 \approx \beta_2$ ,  $b_3 \approx \beta_3$ ) коэффициенты регрессии будут характеризовать собственно линейные эффекты. Из-за смешения оценок разные вектор-столбцы матрицы ДФЭ будут совпадать. Для примера, на рис. 6.8, б это  $x_1$  и  $x_2x_3$ ,  $x_2$  и  $x_1x_3$ .

Таким образом, максимальное разделение оценок рассматриваемых эффектов при ДФЭ возможно только при использовании для дополнительных факторов вектор-столбцов с незначащими смешанными взаимодействиями. Существенную роль в этом случае играет априорная информация. При ее отсутствии экспериментатору следует выбирать вектор-столбцы с наибольшим порядком эффекта взаимодействий, так как с ростом порядка значимость вклада этого эффекта падает.

Число несмешанных линейных эффектов в дробной реплике называется ее разрешающей способностью. Ее прямая оценка затруднена. Поэтому дробные реплики задают с помощью генерирующих соотношений.

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов взаимодействий, принятым незначимым, смешан данный линейный эффект фактора, называется генерирующим соотношением. Например, для ДФЭ  $2^{4-1}$  имеем  $x_4 = x_1x_2x_3$ , т.е. оценка эффекта  $b_4$  это  $\beta_4 + \beta_{1,2,3}$ .

Умножив обе части генерирующего соотношения на уровень дополнительного фактора (в нашем примере  $x_4$ ), имеем  $x_4 \cdot x_4 = x_4^2 = 1 = x_1x_2x_3x_4$ .

Это символическое обозначение произведения столбцов, соответствующих факторам ПФЭ, равное +1 или -1, называется определяющим контрастом. Контраст позволяет определить, какой эффект смешан с данным. Для этого обе части определяющего контраста нужно умножить на столбец, соответствующий данному эффекту. Для нашего примера  $x_1 = x_1^2x_2x_3x_4 = x_2x_3x_4$ , так как  $x_1^2 = 1$ .

Следовательно, коэффициент линейного уравнения регрессии  $b_1$  будет оценкой  $\beta_1 + \beta_{2,3,4}$ .

ДФЭ, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, называются планами с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Реплики с макси-

мальной разрешающей способностью, т.е. смешанные взаимодействия наибольшего порядка, называются главными.

Итак, для составления плана ДФЭ следует сделать следующее:

- выбрать вектор–столбец, который будет использован для получения оценки дополнительного линейного фактора, т.е. определить генерирующее соотношение;

- рассчитать определяющий контраст, умножив обе части генерирующего соотношения на уровень дополнительного фактора;

- определить условия смешивания оценок, умножая определяющий контраст на обозначение вектор–столбца, с помощью которого рассчитывается данный линейный эффект.

Следует отметить, что при разработке планов ДФЭ большей дробности, чем полуреплика, нужно выбирать несколько генерирующих соотношений.

Формализованная методика ДФЭ включает ряд нижеследующих этапов. Однако начальная фаза реализации ДФЭ (постановка задачи выбор параметра выхода, числа факторов) полностью совпадает с методикой проведения ПФЭ. Остановимся на отличиях.

1. Определить число линейных коэффициентов в уравнении регрессии

*Пример.* Необходимо исследовать влияние 5 факторов ( $k = 5$ ).

Тогда число коэффициентов линейной регрессионной модели  $i = k + 1 = 5 + 1 = 6$ .

2. Выбрать план ПФЭ – основу дробной реплики.

*Пример.* Ближайший план ПФЭ, требующий наименьшего количества опытов, но большего, чем число коэффициентов модели  $N \geq i$ , это ПФЭ  $2^3$ .  $2^3 = N = 8 > 6 = i$ .

3. Выбрать тип реплики ДФЭ.

*Пример.* Выбираем четвертьреплику ДФЭ  $2^{5-2}$ .

4. Определить генерирующие соотношения, построить стандартную матрицу исходного плана ПФЭ и проанализировать значимость смешанных взаимодействий.

*Пример:* табл.6.7.

Таблица 6.7

Матрица ПФЭ  $2^3$

№ п/п	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_2x_3$	$x_1x_3$	$x_1x_2x_3$
1	–	–	–	+	+	+	–
2	+	–	–	–	+	–	+
3	–	+	–	–	–	+	+
4	+	+	–	+	–	–	–
5	–	–	+	+	–	–	+

6	+	–	+	–	–	+	–
7	–	+	+	–	+	–	–
8	+	+	+	+	+	+	+

Четвертьреплика ДФЭ  $2^{5-2}$  может быть задана любыми двумя из следующих генерирующих соотношений:

1)  $x_1x_2$ ; 2)  $x_2x_3$ ; 3)  $x_1x_3$ ; 4)  $x_1x_2x_3$ .

Предположим, что из априорной информации известно о незначимости смешанного взаимодействия  $x_1x_3$  (например: октановое число горючего и вес двигателя). Исходя из этого, для  $x_4$  выбираем вектор-столбец матрицы  $x_1x_3$ , а для  $x_5 = x_1x_2x_3$ , так как обычно с ростом порядка взаимодействий значимость вклада этого эффекта падает.

Выбранные генерирующие соотношения – это  $x_4 = x_1x_3$  и  $x_5 = x_1x_2x_3$ .

5. Найти определяющие контрасты

Определяющие контрасты находят умножением обеих частей генерирующих соотношений на уровень дополнительных факторов.

*Пример:*

$$x_4 \cdot x_4 = 1 = x_1x_3x_4; \quad 1 = x_1x_2x_3x_5.$$

Перемножив эти определяющие контрасты, получим третье соотношение

$$1 = x_2x_4x_5.$$

Полная разрешающая способность реплики определяется обобщенным определяющим контрастом

$$1 = x_1x_2x_3x_5 = x_1x_3x_4 = x_2x_4x_5.$$

6. Определить схему смешивания оценок

Оценки находим последовательным умножением обобщающего определяющего контраста на  $x_1$ ;  $x_2$ ;  $x_3 \dots x_k$ .

*Пример:*

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2x_3x_5 = x_3x_4 = x_1x_2x_4x_5; & b_1 &\rightarrow \beta_1 + \beta_{2,3,5} + \beta_{3,4} + \beta_{1,2,4,5}; \\ x_2 &= x_1x_3x_5 = x_1x_2x_3x_4 = x_4x_5; & b_2 &\rightarrow \beta_2 + \beta_{1,3,5} + \beta_{1,2,3,4} + \beta_{4,5}; \\ x_3 &= x_1x_2x_5 = x_1x_4 = x_2x_3x_4x_5; & b_3 &\rightarrow \beta_3 + \beta_{1,2,5} + \beta_{1,4} + \beta_{2,3,4,5}; \\ x_4 &= x_1x_3x_4x_5 = x_1x_3 = x_2x_5; & b_4 &\rightarrow \beta_4 + \beta_{1,3,4,5} + \beta_{1,3} + \beta_{2,5}; \\ x_5 &= x_1x_2x_3 = x_1x_3x_4x_5 = x_2x_4; & b_5 &\rightarrow \beta_5 + \beta_{1,2,3} + \beta_{1,3,4,5} + \beta_{2,4}. \end{aligned}$$

Анализ смешивания оценок коэффициентов уравнения регрессии должен убедить экспериментатора в правильности выбора генерирующих соотношений.

7. Построить матрицу ДФЭ  $2^{5-2}$  и реализовать опыты

Матрица ДФЭ  $2^{5-2}$  приведена в табл. 6.7.

Если после реализации экспериментов коэффициенты парных взаимодействий, например,  $b_{1,2}$  или  $b_{2,3}$  имеют значимую величину (отличаются от нуля), то вызывает сомнение правильность выбора генерирующего соотношения. В этом случае следует поставить второй ДФЭ, выбрав другую реплику (в нашем примере  $\frac{1}{4}$  реплику).

Таким образом, эффективность применения дробных реплик зависит от интуиции исследователя, позволяющей удачно выбрать систему смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействий.

### 6.2.2. Разбиение матрицы 2-уровневых планов на блоки

Если экспериментатор предполагает, что в процессе проведения исследований могут происходить изменения внешней среды (влажности, температуры), старение аппаратуры и изменение ее показателей, могут использоваться партии сырья с различными отклонениями параметров, изучаться разные конструкции установок и т.п., то целесообразно использовать разбиение матрицы на отдельные части. Подобные части факторных планов называют блоками.

Такое разбиение матрицы позволяет компенсировать влияние систематических ошибок, источник которых известен. При этом межблоковый эффект заведомо смешивается с взаимодействиями, которыми можно пренебречь. Кроме того, разбиение на блоки дает возможность учесть качественные изменения объекта исследований и ввести их в эксперимент как количественные.

Матрицу факторного эксперимента типа  $2^k$  можно разбить на  $2^n$  блоков при  $n < k$ . Так, матрица ПФЭ  $2^4$  разбивается на 2 блока по 8 опытов, 4 блока – по 4 опыта или 8 блоков – по 2 опыта. Количество блоков соответствует числу известных неоднородностей, которые могут носить дискретный (несколько операторов, конструкций, партий сырья) или непрерывный характер (временной дрейф, температурный). Эффект неоднородности отразится на величине свободного члена уравнения регрессии и на коэффициентах взаимодействий, которыми пренебрегают. При отсутствии априорной информации следует выбирать взаимодействия самого высокого порядка.

При временном дрейфе можно просто дублировать все опыты для каждого временного интервала. Тогда получим набор коэффициентов регрессии, по которым находят влияние временного дрейфа на каждый коэффициент в виде

$$y = b_0(t) + b_1(t)x_1 + \dots + b_k(t)x_k. \quad (6.57)$$

Однако это приводит к значительному увеличению числа опытов.

Следует отметить, что при получении нескольких моделей однотипных процессов для последующего обобщения необходимо помнить, что уравнения регрессии инвариантны к изменению интервала варьирования факторов.

Гораздо более эффективно рассмотреть источник неоднородности, например, временный дрейф как новый дополнительный фактор, т.е. матрица ПФЭ разбивается на два блока, являющихся полурепликами ДФЭ. Например, разбиение матрицы ПФЭ  $2^3$  на 2 блока по 4 опыта, выполняемое в пренебрежении взаимодействием  $x_1x_2x_3$ , эквивалентно использованию полуреплики ДФЭ<sup>4-1</sup> с определяющим контрастом  $1 = x_1x_2x_3x_4$ . Формализованную методику в этом случае можно свести к следующим этапам.

1. Строим стандартную матрицу ПФЭ.
2. Заменяем эффект взаимодействий самого высокого порядка на новый дополнительный фактор, являющийся источником неоднородности.
3. Разбиваем матрицу на 2 блока: 1-й – с верхним уровнем нового фактора (пренебрегаемого эффекта взаимодействий), 2-й – с нижним уровнем.



В этом случае все показатели 1-го блока будут завышены на  $\beta$ , а 2-го – занижены на ту же величину. Тогда

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i - \beta, \quad (6.58)$$

а все остальные коэффициенты не смешаны с дрейфом.

Итак, при переходе от блока к блоку дрейф изменяется скачкообразно на  $2\beta$ , а внутри блока дрейф отсутствует. Таким образом, план эквивалентен полуреplikе ПФЭ  $2^{k-1}$ , где новый фактор – источник неоднородности (дрейф).

При разбиении матриц на блоки для удобства приняты следующие обозначения:

- (1) – символ обозначающий, что все факторы в строке матрицы соответствуют нижнему уровню;
- каждому фактору присвоена латинская буква ( $x_1$ –a,  $x_2$ –b,  $x_3$ –c и т.д.);
- наличие одной или нескольких букв перед строкой матрицы говорит о том, что в этой строке факторы, соответствующие имеющимся латинским буквам, имеют верхний уровень (обозначены “+”).

Эта символика позволяет записать матрицу одной строкой. Например, для матрицы ПФЭ  $2^4$  с разбиением на 4 блока, имеем (табл.6.8).

(1) a b ab; c ac bc abc; d ad bd abd; cd acd bcd abcd.

Таблица 6.8

Матрица плана  $2^4$  с разбиением на блоки

№ п/ п	Буквен- ное обо- значение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Номер блока
1	(1)	–	–	–	–	1
2	a	+	–	–	–	
3	b	–	+	–	–	
4	ab	+	+	–	–	
5	c	–	–	+	–	2
6	ac	+	–	+	–	
7	bc	–	+	+	–	
8	abc	+	+	+	–	
9	d	–	–	–	+	3
10	ad	+	–	–	+	
11	bd	–	+	–	+	
12	abd	+	+	–	+	
13	cd	–	–	+	+	4
14	acd	+	–	+	+	
15	bcd	–	+	+	+	
16	abcd	+	+	+	+	

1-й блок – это стандартная матрица ПФЭ  $2^2$ ;

2-й блок получаем, умножая буквенные строки 1-го блока на “с” или повторяя 1-й блок на верхнем уровне  $x_3$ ;

3-й блок получаем, умножая буквенные строки 1-го блока на “d”;

4-й блок получаем, умножая буквенные строки 2-го блока на “d” или повторяя 2-й блок на верхнем уровне  $x_4$ .

Существует несколько отличный способ разбиения матрицы факторного плана на блоки. Покажем его на примере.

Пусть нужно поставить эксперимент  $2^4$  и известно о четырех источниках неоднородности, которые могут значительно исказить результаты. Следовательно, необходимо разделить матрицу эксперимента на 4 блока.

Разобьем наши действия на отдельные этапы.

1. Определение количества эффектов взаимодействий, которыми можно пренебречь.

Количество таких эффектов определяется числом степеней свободы, связанных с различиями между блоками:

$$f = n - 1 = 4 - 1 = 3, \quad (6.59)$$

где  $f$  – число степеней свободы;  $n$  – количество блоков.

2. Выбор эффектов взаимодействий.

Два эффекта взаимодействий, которыми можно пренебречь, выбираются исходя из априорной информации или наиболее высокого порядка смешивания. Это  $x_1x_2x_3$  и  $x_2x_3x_4$ .

Третий эффект является произведением двух первых. Это  $x_1x_2^2x_3^2x_4 = x_1x_4$ , так как квадрат уровня любого фактора в кодовых переменных всегда равен единице.

3. Формирование первого блока

Эффектам взаимодействий, которыми можно пренебречь, присваиваем буквенное обозначение:

$x_1x_2x_3 - abc$ ;  $x_2x_3x_4 - bcd$ ;  $x_1x_4 - ad$ .

В качестве первого опыта блока принимаем (1), где все факторы на нижних уровнях.

Затем включаем в блок те опыты, которые имеют четное количество букв, совпадающих с символами хотя бы двух из трех выбранных взаимодействий.

Второй опыт –  $bc$  ( $x_2x_3$ ) – буквенные символы совпадают с двумя символами двух первых отобранных взаимодействий.

Третий опыт –  $acd$  ( $x_1x_3x_4$ ) – два буквенных символа совпадают с символами всех отобранных взаимодействий.

Четвертый опыт –  $abd$  ( $x_1x_2x_4$ ) – два символа совпадают с символами всех трех отобранных взаимодействий.

Тогда первый блок – это (1)  $bc$   $acd$   $abd$ .

4. Формирование остальных блоков.

Выбираем любой неиспользованный опыт и умножаем на его буквенный символ каждый член первого блока. Имеем, выбрав опыт “a”, а  $abc$   $cd$   $bd$ . Это второй блок.

Для получения третьего блока выбираем другой неиспользованный опыт, например, b. Умножая все члены первого блока на его символ, имеем:  
b c abcd ad.

Аналогично для четвертого блока, выбрав опыт “d”, имеем:  
d bcd ac ab.

5. Построение матрицы  $2^4$ , разбитой на 4 блока (см. табл. 6.8).

Анализ блоков в матрице показывает, что в каждом блоке, за исключением смешанных, сумма столбцов равна нулю (равенство +1 и –1).

Следовательно, межблочный эффект отразится только на величине следующих коэффициентов регрессии:  $b_0$ ;  $b_{1,4}$ ;  $b_{1,2,3}$  и  $b_{2,3,4}$ . Остальные коэффициенты освобождены от влияния источников неоднородности.

Подобные планы называются робастными (устойчивыми) к дрейфу или иной известной систематической ошибке (табл.6.9).

Таблица 6.9

Блочный план, робастный к дрейфу

№ п/п	Блок	Буквенное обозначение	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_1x_4$	$x_2x_3$	$x_2x_4$	$x_3x_4$	$x_1x_2x_3$	$x_1x_3x_4$	$x_1x_2x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3x_4$
1	1	(1)	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	–	–	–	–	+
2		bc	–	+	+	–	–	–	+	+	–	–	–	+	+	–	+
3		acd	+	–	+	+	–	+	+	–	–	+	–	+	+	–	–
4		abd	+	+	–	+	+	–	+	–	+	–	–	–	–	–	–
5	2	a	+	–	–	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	–	–
6		abc	+	+	+	–	+	+	–	+	–	–	+	–	–	–	–
7		cd	–	–	+	+	+	–	–	–	+	+	–	+	–	–	+
8		bd	–	+	–	+	–	+	–	–	+	–	+	+	–	–	+
9	3	b	–	+	–	–	–	+	+	–	–	+	+	–	+	+	–
10		c	–	–	+	+	+	–	+	–	+	–	+	+	–	+	–
11		abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12		ad	+	–	–	+	–	–	+	+	–	–	+	–	–	+	+
13	4	d	–	–	–	+	+	+	–	+	–	–	–	+	+	+	–
14		bcd	–	+	+	+	–	–	–	+	+	+	–	–	–	+	–
15		ac	+	–	+	–	–	–	–	–	+	–	–	–	–	+	+
16		ab	+	+	–	–	+	+	–	–	–	+	–	+	+	+	+

## 7. ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Планирование и реализация экспериментальных исследований в промышленных условиях или на промышленных агрегатах и установках значительно усложнены по сравнению с лабораторными условиями. В основном это связано с ограничениями в возможности варьировать переменные факторы. Так, если диапазон варьирования мал, то выявить влияние факторов на параметр оптимизации не удастся, а если велик – то ряд режимов может выйти за допустимые пределы, что приведет к снижению качества продукции или производительности агрегата.

Для действующего производства характерны следующие особенности:

- высокий уровень случайных помех;
- временной дрейф параметров;
- ограничения изменений независимых параметров;
- наличие значительного числа неуправляемых факторов.

Вместе с тем, чем активнее вмешательство в исследуемый процесс (чем больше диапазон варьирования), тем выше вероятность извлечения полезной информации для построения математической модели или для управления процессом. Однако при этом возрастает цена информации.

Компромиссное соотношение между количеством получаемой информации и ущербом, причиняемым объекту в результате активного экспериментирования, достигается специальными методами построения промышленных экспериментов.

Сформулируем основные требования к экспериментам, проводимым в производственных условиях.

1. Необходима обязательная возможность установления различий между значениями параметра оптимизации в точках факторного пространства на фоне значительной ошибки воспроизводимости.

2. Во время реализации эксперимента технико-экономические показатели исследуемого процесса должны быть близкими к тем, которые были до экспериментирования.

3. Необходимо иметь возможность оптимизировать процессы, обладающие временным дрейфом.

4. Вычислительные процедуры должны быть простыми и удобными для выполнения в производственных условиях.

Этим требованиям удовлетворяют описанные ниже методы экспериментальных исследований.

### 7.1. Эволюционное планирование

Этот вид планирования экспериментов обычно применяют для двух- или трехфакторных процессов, так как при дальнейшем увеличении числа факторов вычисления становятся громоздкими. В основу эволюционного

планирования (ЭВОП) положен план полнофакторного эксперимента или дробной реплики.

В ЭВОП принята своя терминология. Каждое отдельное сочетание независимых переменных (факторов) или строка матрицы планирования называется операционными условиями.

Совокупность опытов, задаваемых матрицей планирования, или однократное прохождение всех операционных условий называется циклом.

Последовательность параллельных дублированных циклов, выполняемых для одних и тех же операционных условий, заданных матрицей планирования, называется фазой.

В результате ЭВОП вычисляются по каждой из координат факторного пространства эффекты  $E_j$ . Они в два раза больше коэффициентов регрессии  $b_j$  и определяются по аналогичным формулам.

При эволюционном планировании постулируют однородность дисперсий в точках плана.

Установление различия между значениями параметра оптимизации опирается на принцип математической статистики: при повторности опытов в “ $n$ ” раз точность среднего возрастает в “ $\sqrt{n}$ ” раз. То есть ставят значительное число параллельных опытов. При постоянно работающей производственной установке это несложно.

После реализации первой фазы (рис.7.1) и выявления наилучшей, по значению выходного параметра, точки (на рис.7.1 отмечено звездочкой); в нее переносят центр следующей фазы и реализуют эксперименты.

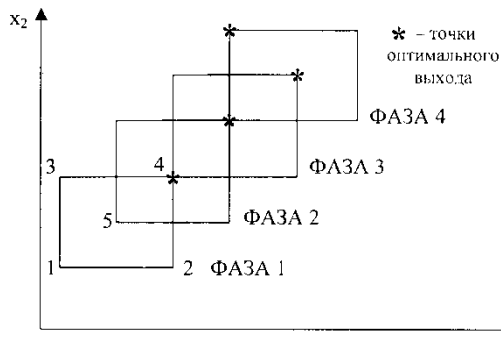


Рис.7.1. Схема эволюционного планирования (фаза – ПФЭ  $2^2$ )

При выполнении экспериментальной фазы имеет смысл добавить в ее центр дополнительный эксперимент для определения формы (выпуклая или вогнутая) и степени кривизны поверхности отклика.

То есть общее число опытов при ЭВОП

$$N = 2^k + (k - 1), \quad (7.1)$$

где  $k$  – число переменных факторов.

Особенностью выполнения и обработки результатов эволюционных экспериментов является методическое упрощение при естественном снижении точности, а также использование специальных карт.

Среднее квадратическое отклонение находят по формуле

$$\sigma = R \cdot d, \quad (7.2)$$

где  $R$  – размах в выборке параллельных опытов;  $d$  – табличный коэффициент ( $d = 0,34 - 0,46$ ).

Значимость линейных эффектов оценивают сравнением их величин с двухсигмовым доверительным интервалом  $\Delta$ :

$$E_j > \Delta = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (7.3)$$

где  $n$  – количество циклов.

Рассмотрим методику ЭВОП на примере двухуровневого двухфакторного плана.

1. Выбор центра плана.

В качестве нулевой точки (центр плана) выбираем оптимальный производственный режим или стандартные производственные условия.

2. Выбор основы плана.

Так как имеется два фактора, в качестве основы выбираем ПФЭ  $2^2$ .

3. Запись матрицы планирования.

N	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$
1	–	–	+
2	+	–	–
3	–	+	–
4	+	+	+
5	0	0	0

4. Реализация двух первых циклов.

n	1	2	3	4	5
$y_{1i}$	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	$y_{14}$	$y_{15}$
$y_{2i}$	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$y_{24}$	$y_{25}$

5. Вычисление среднего выхода по опыту:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n y_{ui}. \quad (7.4)$$

Пример:  $\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_{11} + y_{21})$ , и в результате имеем:

N	1	2	3	4	5
$\bar{y}_i$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$

6. Вычисление эффектов по факторам.

$$E_j = 2b_j = \frac{2 \sum_{i=1}^N \bar{y}_i x_{ji}}{N}; \quad E_{jr} = \frac{2 \sum_{i=1}^N \bar{y}_i x_{ji} x_{ri}}{N}. \quad (7.5)$$

Пример:  $E_1 = \frac{2(-\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4)}{4}; \quad E_2 = \frac{2(-\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4)}{4};$

$$E_{12} = \frac{2(\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 + \bar{y}_4)}{4}.$$

## 7. Вычисление размаха.

$$R = (\bar{y}_{u,i} - y_{u+1,i})_{\max} - (\bar{y}_{u,i} - y_{u+1,i})_{\min}, \quad (7.6)$$

где  $\bar{y}_{u,i}$  – средний выход  $u$ -того и предыдущих циклов в  $i$ -х операционных условиях;  $y_{u+1,i}$  – выход  $u+1$ -го цикла в  $i$ -х операционных условиях.

При поведении второго цикла выход опытов первого цикла считаем средним, т.е.  $y_{1,i} = \bar{y}_{u,i}$ .

*Пример:*

N	1	2	3	4	5
$\bar{y}_{u,i}$	$\bar{y}_{11}$	$\bar{y}_{12}$	$\bar{y}_{13}$	$\bar{y}_{14}$	$\bar{y}_{15}$
$y_{u+1,i}$	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	$y_{24}$	$y_{25}$
$\bar{y}_{u,i} - y_{u+1,i}$	$r_1$	$r_2$	$-r_3$	$r_4$	$r_5$
Примечание	max		min		

$$R = (+r_1) - (-r_3). \quad (7.7)$$

## 8. Расчет среднего квадратического

$$\sigma = R \cdot d.$$

## 9. Определение доверительного двухсигмового интервала

$$\Delta = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}.$$

## 10. Определение значимости эффектов.

10.1.  $|E_j| < \Delta$ , т. е. эффекты незначимы. Необходимо выполнить третий цикл и повторить п. п. 5.

10.2.  $|E_j| > \Delta$ , т.е. эффекты значимы (или один из эффектов), и можно переходить к новой фазе.

## 11. Построение новой матрицы.

В качестве нулевой точки выбираем операционные условия предыдущей фазы с оптимальным выходом (например, точка 4 на рис.7.1). При переходе к новой фазе можно изменять величину интервалов варьирования и даже сами факторы. Новый план не обязательно должен быть квадратом. Он бывает и прямоугольником. Для второй фазы берем доверительный интервал эффектов из первой фазы, считая его априорно известным для фазы 2.

Таким образом, статистический анализ результатов при ЭВОП проводят последовательно после каждого цикла.

Следует иметь в виду, что фундаментальнейшим отличием промышленных экспериментов от лабораторных является экономический фактор. Поэтому цена за полученную информацию при ЭВОП не должна быть слишком большой (рост брака или разладка установок при экспериментах).

## 7.2. Последовательное симплекс-планирование

Одним из экспериментальных методов, применяемых в промышленных условиях, является симплекс-планирование.

Этот метод был предложен в 1962 году Спендлеем, Некстом и Химсвортом.

Симплекс-планирование – это последовательное шаговое движение к оптимуму поверхности отклика. Для метода характерно совмещение изучения поверхности отклика и перемещения по ней. Это достигается тем, что эксперименты ставятся только в точках факторного пространства, соответствующих вершинам симплекса.

$i$ -мерный симплекс представляет собой выпуклую фигуру, образованную  $i+1$  точками (вершинами). Очевидно, что число вершин симплекса на единицу превосходит размерность факторного пространства. Так, на плоскости симплексом является треугольник, в трехмерном пространстве – тетраэдр, на одномерной оси – отрезок прямой.

Симплекс называется регулярным, если все расстояния между его вершинами равны. На плоскости – это равносторонний (правильный) треугольник. Неправильный симплекс можно всегда преобразовать в регулярный путем кодирования факторов по обычным формулам.

В основе применения симплекса для целей оптимизации лежит следующее его важное свойство: из любого симплекса можно, отбросив одну из вершин и используя оставшуюся грань, получить новый симплекс, добавив всего лишь одну точку (рис. 7.2). Из симплекса 1, 2, 3, отбросив точку 1 и используя грань 2-3, получаем новый симплекс 2, 3, 4, построив точку 4.

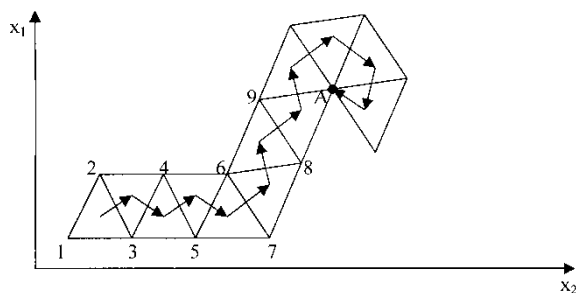


Рис. 7.2. Двумерный симплекс на плоскости

Путем последовательного отбрасывания вершин можно осуществлять перемещение симплекса в факторном пространстве при каждом последующем эксперименте.

Если проводить эксперимент в вершинах симплекса, то можно найти направление максимального наклона поверхности отклика по результатам опытов. Оно проходит из центра симплекса через грань, противоположную вершине (выходу эксперимента) с “плохим” качеством. Это направление показано стрелками на рис. 7.2. Таким образом, отбрасывая точку с неудовле-



творительным значением выхода, строим ее отражение и получаем новый симплекс.

Достигнув области экстремума, симплекс начинает вращаться вокруг своей точки с экстремальным значением выхода (точка А на рис.7.2), что определяет конец процесса оптимизации.

Среди различных методов построения исходных симплексов следует отметить два наиболее употребительных.

### 1-й вариант.

Одну из вершин симплекса помещают в начало кодированных координат. Остальные вершины располагают так, чтобы ребра, выходящие из первой вершины, образовывали одинаковые углы с координатными осями (рис. 7.3, а). Исходный план, составляющий  $i$ -мерный симплекс, ориентированный указанным образом, можно представить матрицей

$$A_1 = \begin{vmatrix} P_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_i & \dots & q_{k-1} & q_k \\ q_1 & P_2 & q_3 & \dots & q_i & \dots & q_{k-1} & q_k \\ q_1 & q_2 & P_3 & \dots & q_i & \dots & q_{k-1} & q_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (7.8)$$

где

$$q_i = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\sqrt{i+1}-1), \quad (7.9)$$

$$P_i = q_i + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad i = 1, 2, 3 \dots k \text{ факторов.} \quad (7.10)$$

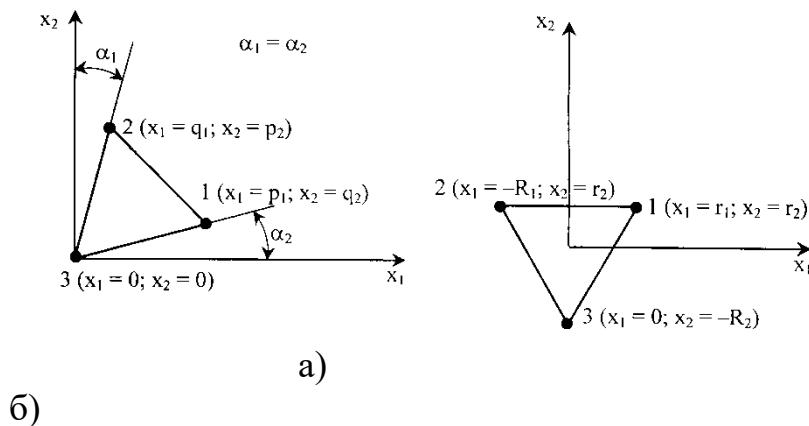


Рис.7.3. Построение начального симплекса:  
а – по варианту 1 (матрица  $A_1$ ); б – по варианту 2 (матрица  $A_2$ )

При использовании матрицы необходимо выделить часть, содержащую  $i$ -столбцов (факторов) и  $(i+1)$ -строк (вершин симплекса). Каждая строка матрицы соответствует одному эксперименту. Точка в начале координат имеет координаты ноль по всем осям.

### 2-й вариант.

В начало координат помещают центр симплекса, а одну из вершин располагают на одной из осей (рис.7.3,б). Тогда координаты вершин симплекса определяются матрицей

$$A_2 = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_i & \dots & r_{k-1} & r_k \\ -R_1 & r_2 & \dots & r_i & \dots & r_{k-1} & r_k \\ 0 & -R_2 & \dots & r_i & \dots & r_{k-1} & r_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -R_{k-1} & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -R_k \end{vmatrix}, \quad (7.11)$$

где 
$$r_i = \frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}}, \quad (7.12)$$

$$R_i = \sqrt{\frac{i}{2(i+1)}}, \quad i = 1, 2, 3 \dots k. \quad (7.13)$$

Изменив в матрице знаки на противоположные, получим симплекс, симметричный данному относительно начала координат. Число опытов в симплексной матрице равно числу вершин симплекса.

Для практического пользования матрицей удобнее представить ее в численных значениях (например, для пяти факторов):

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1,000 & 0,259 & 0,236 & 0,219 & 0,205 \\ 0,293 & 0,966 & 0,236 & 0,219 & 0,205 \\ 0,293 & 0,259 & 0,943 & 0,219 & 0,205 \\ 0,293 & 0,259 & 0,236 & 0,926 & 0,205 \\ 0,293 & 0,259 & 0,236 & 0,219 & 0,912 \\ 0,293 & 0,259 & 0,236 & 0,219 & 0,205 \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,289 & 0,204 & 0,158 & 0,129 \\ -0,5 & 0,289 & 0,204 & 0,158 & 0,129 \\ 0 & -0,578 & 0,204 & 0,158 & 0,129 \\ 0 & 0 & -0,612 & 0,158 & 0,129 \\ 0 & 0 & 0 & -0,632 & 0,129 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,645 \end{vmatrix}.$$

Основными преимуществами симплексного планирования являются:

- значительное сокращение числа экспериментов;
- отсутствие нарушения общего движения к оптимуму при неправильной ориентации одного из симплексов, вызванной ошибкой опыта;
- возможность добавлять в процессе реализации плана дополнительный фактор.

В последнем случае требуется дополнительный опыт.

К недостаткам симплекс-планов следует отнести невозможность предварительной разработки экспериментальных планов и корректировки интервалов варьирования в ходе экспериментов; подготовку последующей серии экспериментов только после реализации предыдущей; ограниченную информацию о характере поверхности отклика.

Рассмотрим на численном примере последовательность этапов симплекс-планирования экстремальных экспериментов.

1. Постановка задачи исследования.

*Пример:*

Оптимизация геометрии концевых фрез.

2. Выбор выхода (отклика).

*Пример:*

Стойкость фрез Т в мин.

### 3. Выбор переменных факторов.

*Пример:*

задний угол  $\alpha$  в градусах,  
передний угол  $\gamma$  в градусах,  
ширина ленточки  $f$  в мм.

### 4. Определение возможной точности измерения и задания факторов.

*Пример:*

$\Delta\alpha = \pm 5'$ ;  
 $\Delta\gamma = \pm 5'$ ;  
 $\Delta f = 0,005$  мм.

### 5. Установление исходных данных: базового уровня (центра начального симплекса) и интервалов варьирования факторов.

Величина основного уровня  $i$ -го фактора в натуральных переменных  $x_{i0}$  соответствует среднему арифметическому исследуемых уровней фактора.

$$x_{i0} = \frac{x_{i\max} + x_{i\min}}{2}. \quad (7.14)$$

Величины предельных значений исследуемых факторов ( $x_{i\max}, x_{i\min}$ ) устанавливаются на основе априорных данных или опыта и интуиции исследователя.

Интервалы варьирования  $\Delta x_i$  должны примерно на порядок превосходить возможные ошибки измерений факторов (п.4). С базой (нулевым уровнем)  $x_{i0}$  интервалы варьирования связаны выражением

$$\Delta x_i = x_{i\max} - x_{i0}. \quad (7.15)$$

*Пример:* табл.7.1.

Таблица 7.1

Исходные данные симплекс-плана

Обозначение факторов		Размерность	База	Интервал варьирования
натуральное	кодированное			
$\alpha$	$x_1$	град	14	4
$\gamma$	$x_2$	град	15	6
$f$	$x_3$	мм	0,5	0,3

### 6. Определение координат начального симплекса в кодовых переменных.

Для этого строится матрица исходного симплекса, которая является планом первой серии экспериментов.

*Пример:* 3-факторное симплекс-планирование.

$$A = \begin{vmatrix} 0,5 & 0,289 & 0,204 \\ -0,5 & 0,289 & 0,204 \\ 0 & -0,578 & 0,204 \\ 0 & 0 & -0,612 \end{vmatrix}.$$

7. Переход от кодовых к натуральным переменным начального симплекса.

Переход выполняется по формуле

$$x_i = \Delta x_i \cdot x_{i_p} + x_{i_0}, \quad (7.16)$$

где  $\Delta x_i$  – интервал варьирования в натуральных переменных;  $x_{i_p}$  –

значение факторов в кодовых переменных;  $x_{i_0}$  – значение базы в натуральных переменных.

*Пример.* Координаты по оси  $x_1$  фактора  $\alpha$  для вершины 1

$$x_1 = 4 \cdot 0,5 + 14 = 16,$$

для вершины 2

$$x_1 = 4 \cdot (-0,5) + 14 = 12,$$

для вершин 3 и 4

$$x_1 = 4 \cdot 0 + 14 = 14.$$

Координаты остальных вершин исходного симплекса рассчитаны аналогично и сведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Координаты вершин исходного симплекса

Сим-плекс	Вершина	Координата по оси		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$
1234	1	16	16,7	0,56
	2	12	16,7	0,56
	3	14	11,5	0,56
	4	14	15	0,32

8. Реализация плана первой серии экспериментов

*Пример* (табл.7.3).

Таблица 7.3

Результаты 1-й серии экспериментов

Сим-плекс	Вершина	Выход (стойкость Т, мин)
1234	1	37,3
	2	31,5
	3	32,5
	4	40,0

9. Выбор наихудшего выхода

Пример: опыт 2 в табл. 7.3.

10. Проводится “отражение” наихудшей точки относительно центра противоположной грани. Координаты новой точки находятся по формуле

$$x_i^n = \frac{2 \sum_{i=1}^k x_i}{k} - x_{\text{отбр}}, \quad (7.17)$$

где  $n$  – порядковый номер вершины “нового” симплекса;  $\sum x_i$  – сумма факторов в натуральных переменных во всех вершинах симплекса кроме отброшенной;  $x_{\text{отбр}}$  – значение фактора в натуральных переменных в отброшенной вершине симплекса;  $i$  – порядковый номер фактора ( $i = 1, 2, 3 \dots k$ );  $k$  – число факторов (мерность факторного пространства).

Пример: координаты пятого эксперимента:

$$x_1^5 = \frac{2(16 + 14 + 14)}{3} - 12 = 17^\circ; \quad x_2^5 = \frac{2(16,7 + 11,5 + 15)}{3} - 16,7 = 12,1^\circ;$$

$$x_3^5 = \frac{2(0,56 + 0,56 + 0,32)}{3} - 0,56 = 0,4 \text{ мм.}$$

11. Реализуем эксперимент во вновь построенной вершине симплекса.

Пример: (табл.7.4).

Таблица 7.4

Результаты эксперимента в точке 5

Но мер оп ыта	Сим- плекс	Вер- шина	$x_1$	$x_2$	$x_3$	T
5	1534	5	$17^\circ$	$12,1^\circ$	0,4 мм	40,7 мин

Последовательное отбрасывание вершин симплекса и нахождение координат новых вершин (движение симплекса в факторном пространстве) продолжается, пока наблюдается рост критерия качества (выхода).

Примечания:

1) эксперименты прекращаются тогда, когда симплекс начинает вращаться вокруг точки оптимума или хотя бы одна из натуральных координат новой вершины симплекса не имеет физического смысла из-за своей величины.

Пример: табл.7.5.

Таблица 7.5

Результаты экспериментов

Но- мер опы	Сим- плекс	Вер- шина	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y

та						
6	1564	6	17,3	17,7	0,29	47,2
7	7564	7	16,5	13,2	0,12	47,8
8	7568	8	19,9	13,7	0,22	50,6
9	7968	9	18,8	17,6	0,02	67,0
10	79108	10	19,5	12,0	0,01	—

В точке 10 (эксперимент №10) величина ленточки ( $f = 0,01$  мм) слишком мала и не может быть рекомендована для производства;

2) при движении симплекса в факторном пространстве может встретиться частный оптимум, меньший истинного. Критериями для оценки оптимума являются априорные данные и опыт исследователя;

3) если после "отражения" наихудшей точки симплекса получена новая точка, которая в новом симплексе также окажется наихудшей, то необходимо, вернувшись к прежнему симплексу, двигаться из него, отбросив точку, которая будет наихудшей, если не считать первой;

4) в некоторых случаях может оказаться, что процесс, который рассматривается как зависящий от  $i$  факторов, на самом деле зависит еще от какого-нибудь  $(i+1)$ -го фактора, величина которого в процессе проведения экспериментов не изменялась.

При этом можно "достроить" симплекс до  $(i+1)$ -мерного, вводя только одну новую точку. Для этого к точкам "старого" пространства с  $(i+1)$ -й координатой, равной  $d$ , надо присоединить еще одну точку, координаты которой

$$\bar{x}_{1d}; \bar{x}_{2d} \dots \bar{x}_{kd}; \bar{x}_{k+1d} = d + h_{k+1}. \quad (7.18)$$

Здесь  $\bar{x}_{1d}$  – средние арифметические значения из соответствующих значений координат "предыдущего" симплекса в натуральных переменных, равные:

$$\bar{x}_{id} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{m}, \quad (7.19)$$

где  $k$  – мерность "старого" факторного пространства (число факторов);  $m$  – количество вершин "старого" симплекса;  $i$  – индекс номера фактора ( $i = 1, 2, 3 \dots k$ );  $d$  – индекс координат, добавочной точки "нового" симплекса.

Значение дополнительного  $(k + 1)$  фактора находится по формуле

$$\bar{x}_{k+1d} = d + h_{k+1} = d + \Delta x_{k+1d} (R_{k+1} + r_{k+1}), \quad (7.20)$$

где  $d$  – величина  $(k + 1)$ -го фактора, которая в процессе проведения экспериментов по "старому" симплексу не учитывалась, но оставалась постоянной (в натуральных переменных);  $\Delta x_{k+1d}$  – интервал варьирования  $(k + 1)$ -го фактора в натуральных переменных;  $R_{k+1}, r_{k+1}$  – радиусы описанной и вписанной сфер симплекса размерностью  $k + 1$ .

*Пример:* при исследовании стойкости фрез не учитывалось влияние их твердости, равное 60 HRC ( $d = 60$ ).

Принимаем:  $\Delta x_{k+1d} = \Delta x_4 = 10$  (интервал варьирования),

$$\bar{x}_{(k+1)0} = \bar{x}_{40} = d = 60 \quad (\text{база}).$$

Рассчитываем значения четырех факторов для 10-й точки “нового” симплекса 7, 9, 6, 8, 10.

$$\bar{x}_{1д}^{10} = \frac{16,5 + 18,8 + 17,3 + 19,9}{4} = 18,1; \quad \bar{x}_{2д}^{10} = 15,6; \quad \bar{x}_{3д}^{10} = 0,16;$$

$$\bar{x}_{4д}^{10} = 60 + 10 \cdot (0,632 + 0,158) = 67,9.$$

После реализации этого эксперимента необходимо выявить наихудший выход и возобновить процесс “отражения” отброшенных вершин.

12. Повторить эксперимент в точке оптимума для устранения возможных ошибок и повышения достоверности данных.

Следует отметить, что симплекс-планы относятся к насыщенным (число опытов равно числу коэффициентов в уравнении регрессии). Это касается матрицы первого (исходного) симплекса и линейной регрессионной модели.

В матрице симплексного плана соблюдается условие ортогональности  $\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0$  и не соблюдается условие парной ортогональности  $\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ki} \neq 0$  и нормировки  $\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 \neq 0$ . Эти планы ротатабельны. В подобных планах коэффициенты линейной модели определяются по формулам

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i; \quad b_j = 2 \sum_{i=1}^N x_{ji} y_i, \quad (7.21)$$

а их дисперсия

$$s_b^2 = 2s_y^2. \quad (7.22)$$

Следовательно, коэффициенты, найденные по симплекс-плану, определяются с меньшей точностью, чем по полнофакторному плану.

Адекватность полученной линейной модели может оцениваться только качественно по величине разности

$$y_3 - \left( \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k y_i - y^* \right), \quad (7.23)$$

где  $y_3$  – экспериментальное значение выхода;  $y_i$  – значение выхода в “хороших” вершинах симплекса;  $y^*$  – наихудшее значение выхода (у отброшенной вершины);  $k$  – число факторов.

Чем больше эта величина (разность между экспериментальным и расчетным значениями выхода), тем менее верна гипотеза об адекватности линейной модели.

Таким образом методика симплексного планирования экспериментов может быть дополнена.

13. Расчет дисперсии воспроизводимости (табл.7.6)

Таблица 7.6

№ П/ П	План			Выход				Примечание
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y'_{ik}$	$y''_{ik}$	$y'''_{ik}$	$\bar{y}_i$	

1	0,5	0,28 9	0,20 4	37, 1	36, 7	38, 1	37, 3	Выполне- но только три па- раллель- ных опыта в вершине симплекса №1
2	-0,5	0,28 9	0,20 4	—	—	—	31, 5	
3	0	— 0,57 8	0,20 4	—	—	—	32, 1	
4	0	0	— 0,61 2	—	—	—	40, 0	

$$S_y^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{(37,1 - 37,3)^2 + (36,7 - 37,3)^2 + (38,1 - 37,3)^2}{3-1} = 0,52.$$

14. Расчет коэффициентов уравнения регрессии (табл.7.7).

Таблица 7.7

№	План		Выход		Расчет		
	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>i</sub>	x <sub>1</sub> y <sub>i</sub>	x <sub>2</sub> y <sub>i</sub>	x <sub>3</sub> y <sub>i</sub>
1	0,5	0,28 9	0,20 4	37,3	18,65	10,779 7	7,6092
2	-0,5	0,28 9	0,20 4	31,5	-15,75	9,1035	6,426
3	0	— 0,57 8	0,20 4	32,1	0	— 18,553 8	6,5484
4	0	0	— 0,61 2	40,0	0	0	-24,48
Σ				140, 9	2,9	1,3294	— 3,8964

$$y = 35,225 + 5,8x_1 + 2,6588x_2 - 7,7928x_3.$$

15. Расчет значимости коэффициентов регрессии (табл.7.8).

Таблица 7.8

№	Коэффи- циенты	Критерий Стьюдента		Вывод
		расчетный	табличный	
1	35,225	34,5 >	4,303	
2	5,8	5,69 >		



3	2,6588	2,607 <	Незна- чим
4	7,7928	7,64 >	

$$S_b = \sqrt{2S_y^2} = \sqrt{2 \cdot 0,52} = 1,02 ; \quad t_p = \frac{|b|}{S_b} > t_{\alpha/2} = 4,303 .$$

16. Оценка адекватности линейной модели

$$40,7 - \left[ \frac{2}{3} (37,3 + 32,1 + 40,0) - 31,5 \right] = 0,13 .$$

Принимаем гипотезу о линейной модели.

Таким образом, итогом проведения симплекс–планирования является знание оптимального значения параметра выхода и величин переменных факторов, обеспечивающих этот оптимум.

### Рекомендуемый библиографический список

1. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента / Ю.П. Адлер. – М.: Металлургия, 1969.
2. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
3. Блохин А.В. Теория эксперимента: курс лекций. В 2 ч. Ч. 1 / А.В. Блохин. – Минск: Научно-методический центр “Электронная книга БГУ”, 2003. [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: <http://anubis.bsu.by/publications/elresources/Chemistry/blohin1.pdf>.
4. Блохин А.В. Теория эксперимента: курс лекций. В 2 ч. Ч. 2 / А.В. Блохин. – Минск: Научно-методический центр «Электронная книга БГУ», 2003. [Электрон. ресурс]. – Режим доступа: <http://anubis.bsu.by/publications/elresources/Chemistry/blohin2.pdf>.
5. Бояршинова А.К. Теория инженерного эксперимента: текст лекций / А.К. Бояршинова, А.С. Фишер. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 85 с.
6. Будник А.В. Планирование измерительного эксперимента и обработка результатов измерений: учеб. пособие / А.В. Будник, В.Е. Галузо, К.В. Андрухович. – Минск: БГУИР, 2003. – 48 с.
7. Вознесенский В.А. Статистические методы планирования эксперимента в технико-экономических исследованиях / В.А. Вознесенский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 264 с.
8. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах: учеб. для вузов / Под ред. А.В. Петрова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1984. – 180 с.
9. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Галалай А.М. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). – М.: Металлургия, 1978. – 112 с.
10. Гришенцев А.Ю. Теория и практика технического и технологического эксперимента: учеб. пособие / А.Ю. Гришенцев. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. – 102 с.

11. Димитров В.П. Введение в теорию принятия решений: учеб. пособие / В.П. Димитров, Л.В. Борисова. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2013.
12. Димитров В.П.. Введение в системный анализ: учеб. пособие / В.П. Димитров, Л.В. Борисов, Б.Б. Жмайлов. – Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2013.
13. Илечко Б. Научные исследования во Франции. Пер. с польск. / Под ред. Ю.В. Семенова. – М.: Мир, 1971. – 287с.
14. Использование метода композиционного планирования эксперимента для описания технологических процессов: метод. указания / Сост. А.Н. Гайдадин, С.А. Ефремова; ВолгГТУ. – Волгоград, 2008. – 16 с.
15. Крагельский И.В. Основы расчетов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
16. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул / Е.Н. Львовский. – М.: Высш. шк., 1982. – 240 с.
17. Любченко Е.А. Планирование и организация эксперимента: учеб. пособие. Ч. 1 / Е.А. Любченко, О.А. Чуднова. – Владивосток: Изд-во ТГЭУ, 2010. – 156 с.
18. Макаричев Ю.А. Методы планирования эксперимента и обработки данных: учеб. пособие / Ю.А. Макаричев, Ю.Н. Иванников. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 131 с..
19. Математическая статистика: учеб. / В.М. Иванова, В.Н. Калинина, Л.А. Нешумова и др. – М.: Высш. шк., 1981. – 371 с.
20. Мельников С.В. Механизация и автоматизация животноводческих ферм / С.В. Мельников. – М.: Колос, 1978. – 280 с.
21. Мельников С.В. Планирование эксперимента в исследованиях сельскохозяйственных процессов / С.В. Мельников, В.Р. Алешкин, М. Рошин – М.: Колос, 1972. – 200 с.
22. Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента: конспект лекций (отдельные главы из учебников для вузов) / Н.А. Спирин, В.В. Лавров; под общ. ред. Н.А. Спирина. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. – 257 с.
23. Мухачёв В.А. Планирование и обработка результатов эксперимента: учеб. пособие / В.А. Мухачёв / Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники. – Томск, 2007. – 118 с.
24. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества / В.В. Налимов. – М.: Физматгиз, 1960. – 430 с.
25. Организация научных исследований в промышленности США. Пер. с англ. /Под ред. О.И.Таленского. –М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. –315с.
26. Основы теории эксперимента. Построение математических моделей: учеб. пособие / Л.В. Борисова, В.П. Димитров, Е.М. Зубрилина ; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону, ООО «ДГТУ-Принт», 2018. – 105 с.
27. Основы теории эксперимента: учеб.-метод. пособие / Е.М. Зуб-

рилина, В.П. Димитров ; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2018. – 174 с.

28. Петровский А.Б. Теория принятия решений: учеб. / А.Б. Петровский. – М.: ИД «Академия», 2009.

29. Реброва И.А. Планирование эксперимента: учеб. пособие / И.А. Реброва. – Омск: СибАДИ, 2010. – 105 с.

30. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных: учеб. пособие для магистров / Н.И. Сидняев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство «Юрайт», 2017. – 495 с.

31. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента / В.В. Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.